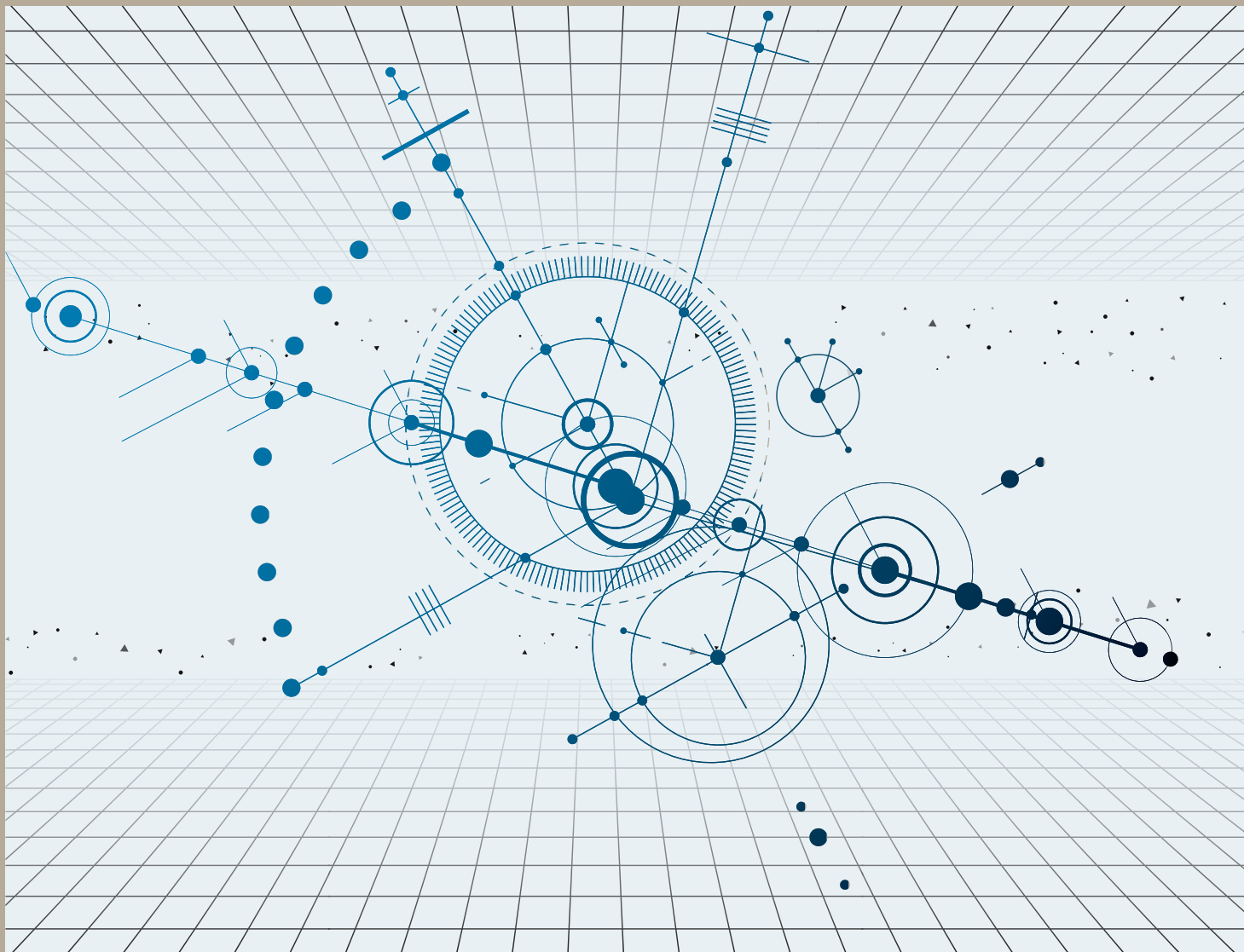




מתמטיקה קדם אקדמית

כרך ג

גיל אלון

תנאי שימוש בקובץ הדיגיטלי:

1. הקובץ הוא לשימושך **האישי** בלבד. פרטים מזהים שלך מוטבעים בקובץ בצורה גלויה ובצורה סמויה.
2. השימוש בקובץ הוא אך ורק למטרות לימוד, עיון ומחקר אישי.
3. העתקה או שימוש בתכנים נבחרים מותרת בהיקף העומד בכללי השימוש ההוגן, המפורטים בסעיף 19 לחוק זכות יוצרים 2007. במקרה של שימוש כאמור חלה חובה לציין את מקור הפרסום.
4. הנך רשאי/ת להדפיס דפים מחומר הלימוד לצורכי לימוד, מחקר ועיון אישיים. אין להפיץ או למכור תדפיסים כלשהם מתוך חומר הלימוד.

מתמטיקה קדם אקדמית גיל אלון



מתמטיקה קדם אקדמית

כרך ג

שיעורים 9-12

גיל אלון



למדא

ספרי האוניברסיטה הפתוחה



Basics of Mathematics

Vol. 3

צוות הפיתוח

כתיבה:

ד"ר גיל אלון

עריכה: אסנת אפרת

הגהה: דפי בר אילן

עימוד: דלית סלומון

עיצוב עטיפה: יעל עינת-ארדיטי

איור: רונית בורלא

זכויות יוצרים: אלכס ריפ

תמונות העטיפה: Svixx / Sylverarts Vectors / Shutterstock

מק"ט 95003-2037

מסת"ב 978-965-06-1717-2 ISBN

© תשפ"ד - 2024. כל הזכויות שמורות לאוניברסיטה הפתוחה.

למדא - ספרי האוניברסיטה הפתוחה, הקריה ע"ש דורותי דה רוטשילד, דרך האוניברסיטה 1, ת"ד 808, רעננה 4353701.

Lamda - The Open University Books, The Dorothy de Rothschild Campus, 1 University Road, P.O.Box 808, Raanana 4353701. Printed in Israel.

אין לשכפל, להעתיק, לצלם, להקליט, לתרגם, לאחסן במאגר מידע, לשדר או לקלוט בכל דרך או בכל אמצעי אלקטרוני, אופטי, מכני או אחר כל חלק שהוא מהחומר שבספר זה. שימוש מסחרי בחומר הכלול בספר זה אסור בהחלט, אלא ברשות מפורשת ובכתב ממדור זכויות יוצרים של האוניברסיטה הפתוחה.

תוכן עניינים לכרך ג

7	שיעור 9: טריגונומטריה
7	טריגונומטריה במשולש ישר-זווית
10	קשרים יסודיים בין הפונקציות הטריגונומטריות
12	ערכי הפונקציות הטריגונומטריות בזוויות מיוחדות
13	רדיאנים
14	טריגונומטריה במעגל
21	זהויות טריגונומטריות יסודיות
22	מסקנות מהזהויות היסודיות
23	הפונקציות הטריגונומטריות ההפוכות
28	משפט הקוסינוסים
30	משפט הסינוסים
31	זהויות של זווית כפולה
32	סכום, הפרש ומכפלת פונקציות טריגונומטריות
34	תרגול של זהויות טריגונומטריות
35	משוואות טריגונומטריות
39	אי-שוויונות טריגונומטריים
40	סיכום שיעור 9
41	שאלות להערכה עצמית
43	שיעור 10: גיאומטריה אנליטית
44	משוואת הישר
47	חיתוך בין שני ישרים
48	הקשר שבין שיפוע לזווית
50	זווית בין שני ישרים
54	הצגה פרמטרית של ישר
58	מרחק בין שתי נקודות
59	משוואת המעגל
60	חיתוך בין ישר ומעגל
61	חיתוך בין שני מעגלים
62	משיק למעגל
63	מציאת משיק בשיטת הדיסקרימיננטה
65	שניוניות במישור
67	האליפסה
68	הצורה הקנונית של האליפסה
69	אליפסות מקבילות לצירים
69	הפרבולה
70	פרבולה קנונית
71	פרבולות מקבילות לצירים
71	היפרבולה

73	משיק לשניונית
75	סיכום שיעור 10
76	שאלות להערכה עצמית
77	שיעור 11: חשבון דיפרנציאלי
79	הנגזרת – הקדמה
86	מעט על מושג הגבול
88	מושג הפונקציה הנגזרת
89	נגזרת של פונקציה לינארית
90	נגזרת הפונקציה $f(x) = x^2$
92	נגזרת של סכום, הפרש, ומכפלה בקבוע
94	נגזרת של פולינום
95	נגזרת של מכפלה
97	נגזרת של מנה
99	חזקות שלמות שליליות
99	חזקות ממסיות ושורשים
100	כלל השרשרת
103	נגזרות של פונקציות טריגונומטריות
106	נגזרת של פונקציה מעריכית
108	נגזרת של פונקציה לוגריתמית
110	נגזרת פונקציית הערך המוחלט
111	סיכום כללי הגזירה היסודיים
112	מציאת תחומי העליה והירידה של פונקציה
116	בעיות מינימום ומקסימום
120	הוכחת אי־שוויונות
122	סיכום שיעור 11
123	שאלות להערכה עצמית
125	שיעור 12: חשבון אינטגרלי
127	פונקציות רציפות
127	קירוב האינטגרל על ידי שטח דיאגרמת עמודות
132	האינטגרל והנגזרת
135	פונקציות קדומות
137	האינטגרל הלא מסוים
138	אינטגרל של מכפלת פונקציה בקבוע
139	האינטגרל $\int x^n dx$
140	אינטגרל של סכום והפרש פונקציות
142	אינטגרל של פונקציות חזקה ושורש
142	אינטגרלים מידיים
144	כלל ההצבה
145	אינטגרציה של הפונקציות $\tan, \cot$
146	הצבה לינארית

147	אינטגרציה בחלקים
148	סיכום נושא האינטגרל הלא מסוים
149	סיכום כללי האינטגרציה
150	בחזרה לאינטגרל המסוים
151	עוד על האינטגרל המסוים
154	משמעויות נוספות של האינטגרל המסוים
157	חישוב השטח בין שני גרפים
160	סיכום שיעור 12
161	שאלות להערכה עצמית
162	סוף דבר
163	פתרונות לשאלות בשיעור 9
191	פתרונות לשאלות בשיעור 10
213	פתרונות לשאלות בשיעור 11
235	פתרונות לשאלות בשיעור 12
253	סיכום הנוסחאות בכרך ג

שיעור 9

טריגונומטריה

הטריגונומטריה (מיוונית: טריגון – משולש; מטריה – מדידה) עוסקת בקשרים שבין אורכי הצלעות וגדלי הזוויות במשולש.

כפי שנראה מיד, מספר קטן של פונקציות ממשיות, הנקראות **פונקציות טריגונומטריות**, מאפשר ביצוע של חישובים מדויקים של אורכים וזוויות, ופתרון של בעיות גיאומטריות.

הטריגונומטריה שימושית מאוד במדידות הנדסיות, במיפוי, ואף במדידת המרחקים שבין גרמי השמיים. לפונקציות הטריגונומטריות תפקיד חשוב בתחומי עיבוד האותות, הנדסת חשמל, ותחומים רבים נוספים.

טריגונומטריה במשולש ישר-זווית

נתבונן במשולש ישר-זווית $\triangle ABC$ ($\angle C = 90^\circ$), ונסמן $\angle A = \alpha$. נסמן, כמקובל, את צלעות המשולש ב- a, b, c . הצלעות a ו- b הן הניצבים במשולש, והצלע c היא היתר.

נתעניין בשאלה הבאה:

בהינתן הזווית α , האם ניתן לדעת מהו היחס a/c ?

שימו לב שאיננו יודעים את אורכי הצלעות a ו- c . אך מתברר שהתשובה לשאלה זו היא חיובית. כדי להיווכח בכך, נניח שנתון משולש נוסף $\triangle A'B'C'$ בעל הזוויות $\angle C' = 90^\circ$ ו- $\angle A' = \alpha$.

כפי שלמדנו בשיעור הקודם, משוויון הזוויות $\angle C = \angle C'$, $\angle A = \angle A'$, נובע שהמשולשים $\triangle ABC$ ו- $\triangle A'B'C'$ דומים, ולכן כל יחס פנימי בין צלעות המשולש $\triangle ABC$ שווה ליחס המתאים לו במשולש $\triangle A'B'C'$.

$$\frac{a}{c} = \frac{a'}{c'}$$

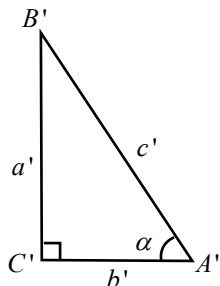
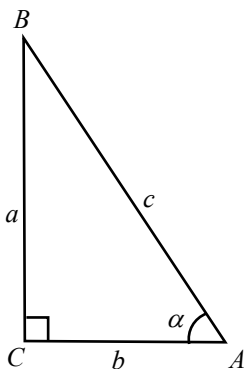
בפרט, מתקיים:

היחס a/c הוא, אפוא, קבוע בכל המשולשים שבהם $\angle C = 90^\circ$ ו- $\angle A = \alpha$, ללא תלות באורכי הצלעות a, c . עצמן. אורכים אלה יכולים להיות עצומים או זעירים, ועדיין היחס ביניהם יישאר קבוע. יחס זה תלוי רק בזווית α , ובמילים אחרות – יחס זה הוא **פונקציה** של α .

פונקציה זו נקראת **סינוס** ומסומנת כך: $\sin$.

סינוס הזווית הוא היחס בין אורך הניצב שמול הזווית, לאורך היתר במשולש ישר-זווית:

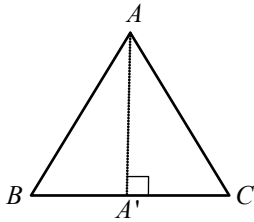
$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$



לדוגמה, נתבונן בזווית $\alpha = 30^\circ$. כדי לחשב את סינוס הזווית, נתבונן במשולש שווה-צלעות $\triangle ABC$, ובתיכון AA' לצלע BC .

זוויות המשולש $\triangle ABC$ הן $\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$.

לפי משפט 8.27, התיכון AA' הוא גם חוצה-זווית וגם גובה. לכן $\angle A'AC = 30^\circ$ ו- $\angle AA'C = 90^\circ$.



נסמן ב- a את אורך הצלע של המשולש $\triangle ABC$: $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC} = a$

המשולש $\triangle AA'C$ הוא משולש ישר-זווית, ובו זווית של 30° . אורך הניצב שמול זווית זו הוא

$$\overline{A'C} = \frac{a}{2}$$

(זכרו כי AA' הוא התיכון ל- BC).

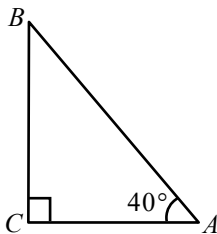
$$\overline{AC} = a$$

אורך היתר הוא

$$\sin 30^\circ = \frac{a/2}{a} = \frac{1}{2} \quad \text{לפיכך:}$$

חישבנו את ערך פונקציית הסינוס עבור הזווית $\alpha = 30^\circ$. מחישוב זה נובע שבכל משולש ישר-זווית, שבו אחת הזוויות היא של 30° , אורך הניצב שמול זווית זו שווה למחצית אורך היתר.

קעת נתבונן בזווית $\alpha = 40^\circ$. במקרה זה אין בנמצא חישוב גיאומטרי פשוט שיניב ביטוי עבור $\sin 40^\circ$, אך עדיין באפשרותנו לחשב מספר זה כשבר עשרוני מקורב.



אפשרות אחת היא לשרטט משולש שזוויותיו הן $40^\circ, 90^\circ, 50^\circ$, למדוד את אורכי צלעותיו, ולחשב את היחס שבין הניצב שמול הזווית של 40° לבין היתר. חישוב זה יהיה, אמנם, ביחס למשולש אחד מסוים, אך כפי שראינו, הוא תקף לכל המשולשים בעלי זוויות אלה. החיסרון בדרך זו הוא שיכולתנו למדוד במדויק אורכי קטעים היא מוגבלת, ולכן מוגבל גם הדיוק של החישוב.

דרך נוספת, יעילה יותר, היא שימוש במחשבון. המחשבון משתמש בתכונות מתקדמות יותר של פונקציית הסינוס ומחשב את הערך $\sin 40^\circ$ בדיוק רב. מתברר כי:

$$\sin 40^\circ \approx 0.6427$$

לכן במשולש ישר-זווית $\triangle ABC$ המקיים $\angle A = 40^\circ$, אם אורך היתר הוא 100 אז אורך

$$\text{הניצב } a \text{ שמול הזווית } \angle A \text{ מקיים} \quad \frac{a}{100} = \sin 40^\circ \approx 0.6427$$

$$a = 100 \sin 40^\circ \approx 64.27 \quad \text{ומכאן}$$

שאלה 1

א. חשבו את אורך הניצב b שמול הזווית $\angle B = 50^\circ$ במשולש שבדוגמה האחרונה. הדרכה: היעזרו במשפט פיתגורס.

ב. במשולש $\triangle ABC$ מתקיים $\angle A = 20^\circ$, $\angle C = 90^\circ$, $c = 7$. מצאו את a .

ג. במשולש $\triangle ABC$ מתקיים $\angle A = 30^\circ$, $\angle C = 90^\circ$, $a = 5$. מצאו את c .

התשובה בעמוד 163

נשוב להתבונן במשולש $\triangle ABC$ שבו נתון $\angle A = \alpha$, $\angle C = 90^\circ$.

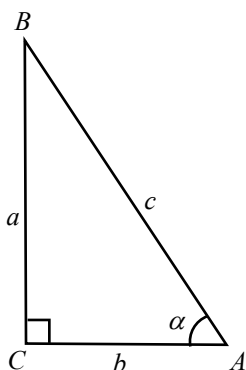
כאמור, היחס a/c נקרא **סינוס הזווית α** ומסומן כך: $\sin \alpha = \frac{a}{c}$

נתבונן ביחסים נוספים בין אורכי צלעות המשולש: b/c , a/b , b/a . בדומה ליחס a/c , גם היחסים האחרים תלויים בזווית α בלבד, ולפיכך הם מיוצגים על ידי פונקציות.

היחס b/c נקרא **קוסינוס הזווית α** ומסומן כך: $\cos \alpha = \frac{b}{c}$

היחס a/b נקרא **טנגנס הזווית α** ומסומן כך: $\tan \alpha = \frac{a}{b}$

היחס b/a נקרא **קוטנגנס הזווית α** ומסומן כך: $\cot \alpha = \frac{b}{a}$



מילולית, ניתן להגדיר את הפונקציות הטריגונומטריות $\sin, \cos, \tan, \cot$ כך:

- סינוס הזווית שווה לאורך הניצב שמול הזווית מחולק באורך היתר.
- קוסינוס הזווית שווה לאורך הניצב שליד הזווית מחולק באורך היתר.
- טנגנס הזווית שווה לאורך הניצב שמול הזווית מחולק באורך הניצב שלידה.
- קוטנגנס הזווית שווה לאורך הניצב שליד הזווית מחולק באורך הניצב שמולה.

שלוש הפונקציות $\sin, \cos, \tan$ הן הפונקציות הטריגונומטריות הבסיסיות והחשובות ביותר.

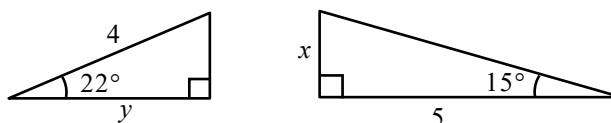
ישנן שתי פונקציות טריגונומטריות נוספות, שכמעט אינן בשימוש, והן מוגדרות כך:

$$\sec \alpha = \frac{c}{b}, \quad \operatorname{cosec} \alpha = \frac{c}{a}$$

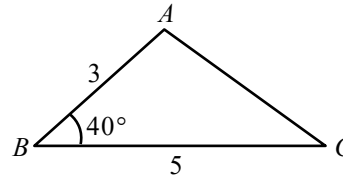
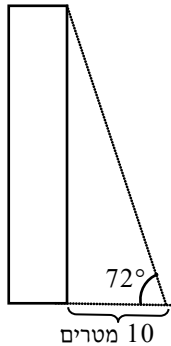
כדי לתרגל את השימוש בפונקציות הטריגונומטריות $\sin, \cos, \tan$, ענו על השאלות הבאות.

שאלה 2

א. מצאו את x, y :



ב. במשולש $\triangle ABC$ חשבו את הגובה לצלע BC ואת שטח המשולש.



ג. לצורך מדידת גובהו של בניין, נעמד המודד במרחק של 10 מטרים מחזית הבניין, ומדד את זווית הראייה ביחס לקרקע. הזווית היא 72° . מהו גובה הבניין?

התשובה בעמוד 163

קשרים יסודיים בין הפונקציות הטריגונומטריות

מהגדרת הפונקציות הטריגונומטריות וממשפטים גיאומטריים מוכרים נובעים קשרים אלגבריים בין הפונקציות הטריגונומטריות השונות, ותכונות יסודיות שלהן:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad \text{א. לכל } 0^\circ < \alpha < 90^\circ :$$

הוכחה:

לפי הגדרת הפונקציות הטריגונומטריות, במשולש $\triangle ABC$ שבו $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = \alpha$

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos \alpha = \frac{b}{c} \quad \text{מתקיים:}$$

המשולש $\triangle ABC$ הוא ישר-זווית. לפי משפט פיתגורס,

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1 \quad \text{נחלק את שני האגפים ב- } c^2 :$$

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1 \quad \text{כלומר,}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad \text{או}$$

$$0 < \sin \alpha < 1, 0 < \cos \alpha < 1 \quad \text{ב. לכל } 0^\circ < \alpha < 90^\circ :$$

$$\tan \alpha > 0, \cot \alpha > 0 \quad \text{וכן,}$$

הוכחה:

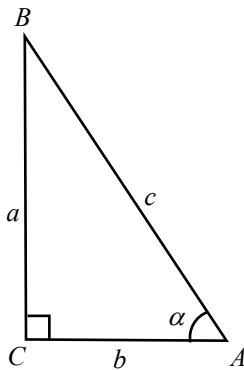
לפי הגדרת הערכים $\sin \alpha, \cos \alpha, \tan \alpha, \cot \alpha$ כיחסים בין צלעות המשולש, מספרים אלה הם חיוביים.

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha < 1 \quad \text{בנוסף, ממה שהוכחנו בסעיף א נובע:}$$

$$\sin \alpha < 1 \quad \text{ולכן (היות ש- } \sin \alpha > 0 \text{),}$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha < 1 \quad \text{באופן דומה, ולכן } \cos \alpha < 1.$$

$\sin^2 \alpha < 1$ הוא ביטוי מקוצר עבור $(\sin \alpha)^2$, כלומר ריבוע הסינוס של α . קיצורים מסוג זה נהוגים בפונקציות טריגונומטריות. באופן דומה, $\cos^2 \alpha = (\cos \alpha)^2$. גם הביטויים $\sin \alpha, \cos \alpha$ עצמם הם מקוצרים, והכתיב המלא הוא $\sin(\alpha), \cos(\alpha)$.



ג. לכל $0^\circ < \alpha < 90^\circ$: $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\tan \alpha}$

הוכחה:

זהויות אלה נובעות ישירות מההגדרה –

$$\square \quad \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{a}{c} : \frac{b}{c} = \frac{a}{b} = \tan \alpha \Rightarrow \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{b}{a} = \cot \alpha$$

ד. לכל $0^\circ < \alpha < 90^\circ$: $\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$

$\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$

$\tan \alpha = \cot(90^\circ - \alpha)$

$\cot \alpha = \tan(90^\circ - \alpha)$

הוכחה:

סכום הזוויות במשולש $\triangle ABC$ (שבו כמקודם, $\angle A = \alpha$, $\angle C = 90^\circ$) הוא 180° . לכן

$$\angle B = 180^\circ - (90^\circ + \angle A) = 90^\circ - \alpha$$

הניצב b הוא מול הזווית $\angle B$, ולפי הגדרת הסינוס

$$\sin \angle B = \frac{b}{c}$$

כלומר: $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$

הניצב a הוא ליד הזווית $\angle B$, לכן

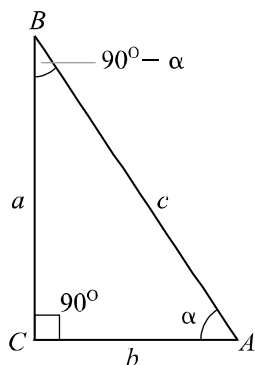
$$\cos \angle B = \frac{a}{c}$$

כלומר: $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$

באופן דומה נקבל

$$\tan \angle B = \frac{b}{a} \Rightarrow \tan(90^\circ - \alpha) = \cot \alpha$$

$$\square \quad \cot \angle B = \frac{a}{b} \Rightarrow \cot(90^\circ - \alpha) = \tan \alpha$$



שאלה 3

א. נתון כי זווית חדה α מקיימת:

חשבו את $\cos \alpha$, $\tan \alpha$, $\cot \alpha$.

ב. הוכיחו את הזהויות:

$$\tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\cot^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

ג. נתון כי זווית חדה α מקיימת:

$$\tan \alpha = \frac{5}{12}$$

חשבו את $\sin \alpha$, $\cos \alpha$.

התשובה בעמוד 164

ערכי הפונקציות הטריגונומטריות בזוויות מיוחדות

מצאנו קודם כי $\sin 30^\circ = 1/2$. בעזרת הזהויות הטריגונומטריות היסודיות, נחשב ערכים נוספים.

מהזהות $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ נובע:

$$\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ = 1 \Rightarrow \cos^2 30^\circ = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

$$\cos 30^\circ = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{מכיוון ש- } \cos 30^\circ > 0, \text{ מתקבלת המסקנה:}$$

כעת ניעזר בזהויות עבור $\tan, \cot$:

$$\tan 30^\circ = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot 30^\circ = \frac{1}{\tan 30^\circ} = \sqrt{3}$$

מערכים אלה נקבל את ערכי הפונקציות הטריגונומטריות בזווית 60° :

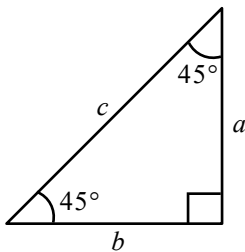
$$\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60^\circ = \cot 30^\circ = \sqrt{3}$$

$$\cot 60^\circ = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

לפי הנוסחה $\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$ ודומותיה (ראו בעמוד הקודם).



כעת נתבונן בזווית 45° . כדי לחשב את ערכי הפונקציות הטריגונומטריות בזווית זו, נתבונן במשולש שזוויותיו הן $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$. במשולש כזה יש שתי זוויות שוות, ולפי משפט 8.23, הצלעות שמולן שוות זו לזו. לפיכך, ניצבי המשולש שווים: $a = b$.

$$c^2 = a^2 + b^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \quad \text{ממשפט פיתגורס, נקבל:}$$

$$\Rightarrow c = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$$

מכאן נקבל את ערכי הפונקציות הטריגונומטריות:

$$\sin 45^\circ = \frac{a}{c} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{b}{c} = \frac{a}{c} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{a}{b} = \frac{a}{a} = 1$$

$$\cot 45^\circ = \frac{b}{a} = \frac{a}{a} = 1$$

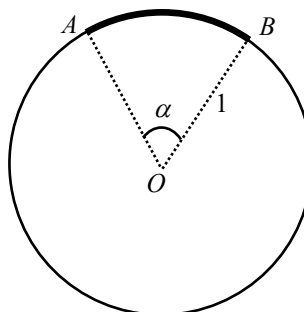
הערכים שמצאנו עד כה מסוכמים בטבלה הבאה:

α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$	$\cot \alpha$
30°	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}$
45°	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1	1
60°	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/3$

רדיאנים

נכיר עתה יחידת מידה חדשה לזוויות – **רדיאן**. יחידה זו נפוצה בטריגונומטריה, מסיבות שיובנו בהמשך (בשיעור 11).

בשיטת הרדיאנים, מודדים זווית על פי אורך הקשת שהיא מקצה על מעגל בעל רדיוס 1:



באיור מוצג מעגל שרדיוסו 1, ובו זווית מרכזית שגודלה α . אורך הקשת $\widehat{AB}$ שווה לגודל הזווית α ביחידות הרדיאנים.

היקף המעגל שרדיוסו 1 הוא 2π . מכאן נובעת נוסחת ההמרה:

$$360^\circ = 2\pi \text{ רדיאנים}$$

$$\boxed{180^\circ = \pi \text{ רדיאנים}}$$

לאחר חילוק ב-2 נקבל:

ליחידות הרדיאנים אין סימון מיוחד. כשלא מצוינת יחידה עבור זווית, נניח שהיא נתונה ברדיאנים.

$$\boxed{1^\circ = \frac{\pi}{180}}$$

מהנוסחה האחרונה נובע:

מנוסחה זו נובע שכדי להמיר זווית ממעלות לרדיאנים, יש להכפיל את מספר המעלות ב- $\pi/180$.

$$\text{בכיוון ההפוך, נקבל: } \text{רדיאן אחד} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57.3^\circ$$

זווית של כ- 57.3° מקצה, אפוא, קשת באורך 1 על מעגל היחידה.

מהשוויון האחרון נובע שכדי להמיר זווית מרדיאנים למעלות, יש להכפיל את מספר הרדיאנים ב- $180/\pi$.

בטבלה הבאה נתונות כמה זוויות שימושיות ברדיאנים:

מעלות	רדיאנים	מעלות	רדיאנים
0°	0	90°	$\pi/2$
30°	$\pi/6$	180°	π
45°	$\pi/4$	270°	$3\pi/2$
60°	$\pi/3$	360°	2π

שאלה 4

א. בטאו ברדיאנים את הזוויות הבאות:

$$10^\circ \text{ (i)} \quad 135^\circ \text{ (ii)} \quad 100^\circ \text{ (iii)}$$

ב. בטאו במעלות את הזוויות הבאות:

$$\pi/5 \text{ (i)} \quad 2\pi/3 \text{ (ii)} \quad 3 \text{ (iii)}$$

ג. חשבו את הערכים הבאים:

$$\sin(\pi/6) \text{ (i)} \quad \cos(\pi/4) \text{ (ii)} \quad \tan 1 \text{ (iii)}$$

התשובה בעמוד 164

טריגונומטריה במעגל

הפונקציות הטריגונומטריות הן שימושיות להפליא, וכבר ראינו דוגמאות לשימוש בהן בחישובי אורכי צלעות במשולש ישר-זווית, ואף במדידות מעשיות (שאלה ג2).

כדי לאפשר יישומים נוספים, למשל במשולשים כלשהם, נרצה להרחיב ככל הניתן את תחומי ההגדרה של פונקציות אלה.

לצורך כך, נתבונן במעגל במישור הקרטזי, שמרכזו בראשית הצירים (הנקודה $O = (0,0)$) ורדיוסו הוא 1. מעגל זה נקרא **מעגל היחידה**.

נניח כי α היא זווית כלשהי בין 0° ל- 360° (וברדיאנים: $0 \leq \alpha \leq 2\pi$). נשרטט רדיוס OA היוצר זווית α עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .

נגדיר את ערכי הפונקציות הטריגונומטריות ב- α כך:

$$\bullet \sin \alpha \text{ הוא שיעור-} y \text{ של הנקודה } A.$$

$$\bullet \cos \alpha \text{ הוא שיעור-} x \text{ של הנקודה } A.$$

$$\bullet \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \text{ (מוגדר כאשר } \cos \alpha \neq 0 \text{)}.$$

$$\bullet \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \text{ (מוגדר כאשר } \sin \alpha \neq 0 \text{)}.$$

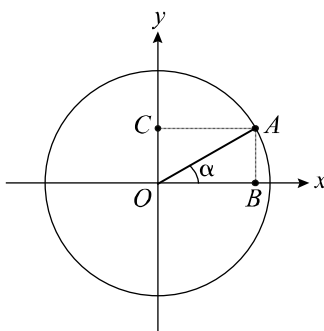
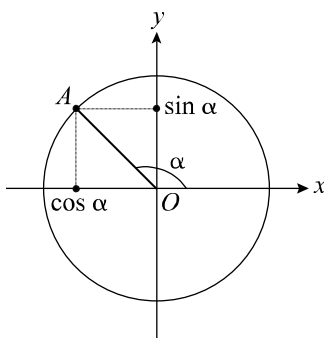
כדי להיווכח בהיגיון שבהגדרות אלה, נוודא שעבור זוויות חדות הן תואמות את ההגדרות שהכרנו עד עתה. נניח, אפוא, ש- α היא זווית חדה, ונסמן את הרדיוס OA שבהגדרה. תהי B היטל הנקודה A על ציר ה- x , ותהי C היטל הנקודה A על ציר ה- y . המשולש OAB הוא ישר-זווית, ובעל זווית $\angle AOB = \alpha$. לכן, לפי הגדרת הסינוס בעזרת משולש ישר-זווית,

$$\sin \alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{AB}}{1} = \overline{AB} = \overline{OC}$$

מכאן ש- $\sin \alpha$ הוא אכן שיעור- y של הנקודה A .

$$\cos \alpha = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB}}{1} = \overline{OB} \quad \text{בדומה:}$$

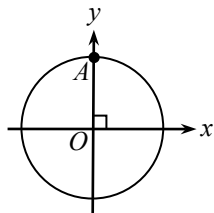
ולכן $\cos \alpha$ הוא שיעור- x של הנקודה A .



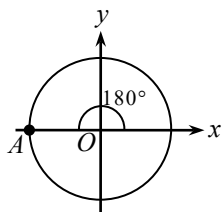
$\triangleleft \overline{AB} = \overline{OC}$ כי $OBAC$ הוא מלבן.

הזהויות $\cot \alpha = \cos \alpha / \sin \alpha$, $\tan \alpha = \sin \alpha / \cos \alpha$ שהוכחנו עבור זוויות חדות מראות שגם ההגדרות החדשות של הפונקציות $\tan, \cot$ תואמות להגדרות הוותיקות.

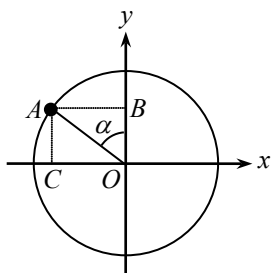
עתה נחשב מספר ערכים של הפונקציות הטריגונומטריות בזוויות שאינן חדות.



א. נתבונן בזווית $\alpha = 90^\circ = \pi/2$: הנקודה A המתאימה לזווית זו היא (0,1).
 לפיכך, $\sin 90^\circ = 1$, $\cos 90^\circ = 0$
 לכן, $\cot 90^\circ = 0$
 מאידך, $\tan 90^\circ$ אינו מוגדר כי $\cos 90^\circ = 0$.



ב. נתבונן בזווית $\alpha = 180^\circ = \pi$: הנקודה A המתאימה לזווית זו היא (-1,0).
 לפיכך, $\sin 180^\circ = 0$, $\cos 180^\circ = -1$
 לכן, $\tan 180^\circ = 0$
 מאידך, $\cot 180^\circ$ אינו מוגדר כי $\sin 180^\circ = 0$.



ג. תהי α זווית חדה, ותהי A הנקודה המתאימה לזווית $90^\circ + \alpha$.
 נסמן ב-B וב-C את היטלי הנקודה A על הצירים.
 נתבונן במשולש $\triangle ABO$: $\angle AOB = \alpha$, $\angle ABO = 90^\circ$, $\overline{OA} = 1$
 מהגדרת הפונקציות הטריגונומטריות במשולש ישר-זווית נובע
 $\sin \alpha = \overline{AB} = \overline{OC}$
 שיעור-x של הנקודה A הוא, לפיכך, $-\sin \alpha$. לכן
 $\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha = -\cos(90^\circ - \alpha)$
 הוכחנו, אפוא, את הזהות הבאה (עבור זוויות חדות α):

$$\boxed{\cos(90^\circ + \alpha) = -\cos(90^\circ - \alpha)}$$

$$\boxed{\sin(90^\circ + \alpha) = \sin(90^\circ - \alpha)}$$

באופן דומה ניתן לראות כי:

לדוגמה, עבור הזווית $135^\circ = 3\pi/2$,

$$\sin 135^\circ = \sin(90^\circ + 45^\circ) = \sin(90^\circ - 45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 135^\circ = \cos(90^\circ + 45^\circ) = -\cos(90^\circ - 45^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 135^\circ = \frac{\sin 135^\circ}{\cos 135^\circ} = -1$$

שאלה 5

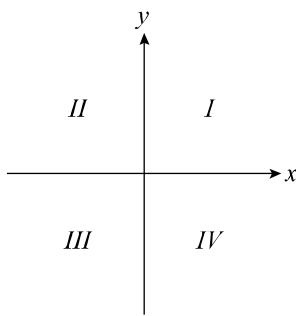
חשבו את ערכי הפונקציות הטריגונומטריות $\sin, \cos, \tan$ בזוויות הבאות:

א. 0° ב. 270° ג. 120°

התשובה בעמוד 165

בטבלה הבאה מסוכמים ערכי הפונקציות הטריגונומטריות במבחר זוויות שימושיות.

α (ברדיאנים)	α (במעלות)	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$	$\cot \alpha$
0	0°	0	1	0	לא מוגדר
$\pi/6$	30°	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}$
$\pi/4$	45°	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1	1
$\pi/3$	60°	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/3$
$\pi/2$	90°	1	0	לא מוגדר	0
π	180°	0	-1	0	לא מוגדר
$3\pi/2$	270°	-1	0	לא מוגדר	0



כדי לקבוע את סימני הפונקציות הטריגונומטריות, נתבונן בחלוקת המישור לארבעה חלקים על ידי ציר ה- x וציר ה- y . חלקים אלה נקראים **רביעים**, וממוספרים בכיוון המנוגד לכיוון השעון (כיוון זה נקרא **כיוון מתמטי חיובי**) כפי שמוצג באיור.

הרביע הראשון מאופיין על ידי התנאים $x \geq 0; y \geq 0$

הרביע השני מאופיין על ידי התנאים $x \leq 0; y \geq 0$

הרביע השלישי מאופיין על ידי התנאים $x \leq 0; y \leq 0$

הרביע הרביעי מאופיין על ידי התנאים $x \geq 0; y \leq 0$.

בהתאם לזווית α , תיפול הנקודה A באחד הרביעים, ובהתאם לכך נקבע סימן הפונקציות הטריגונומטריות, כמפורט בטבלה:

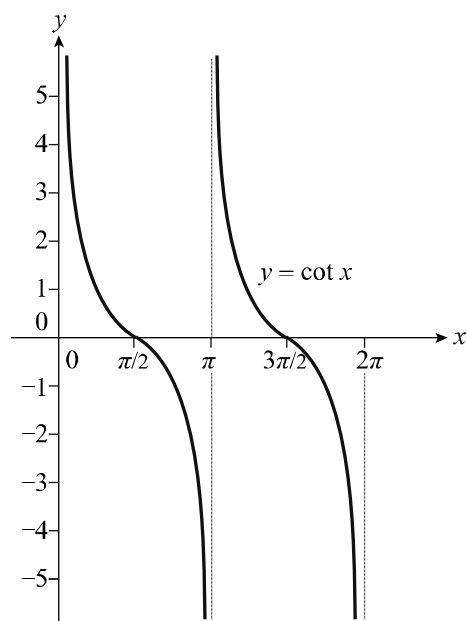
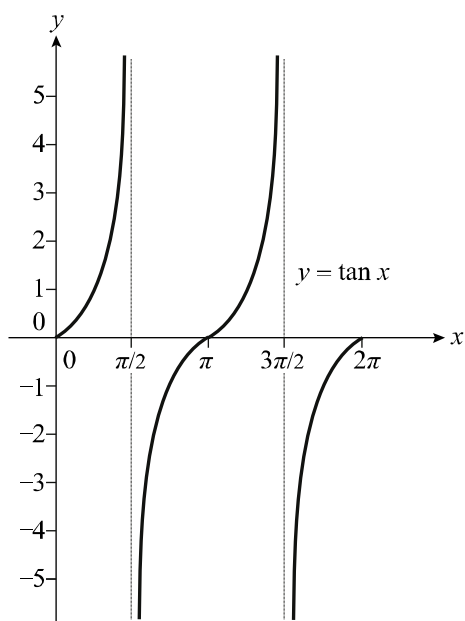
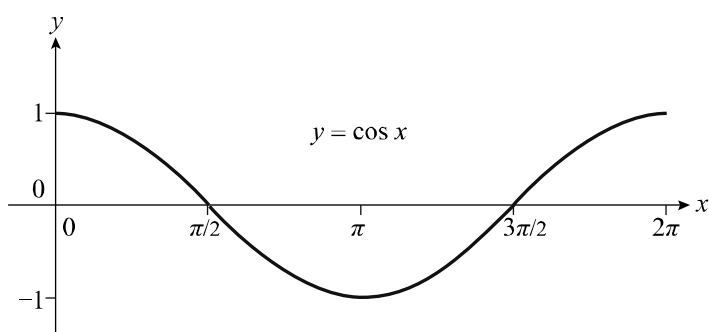
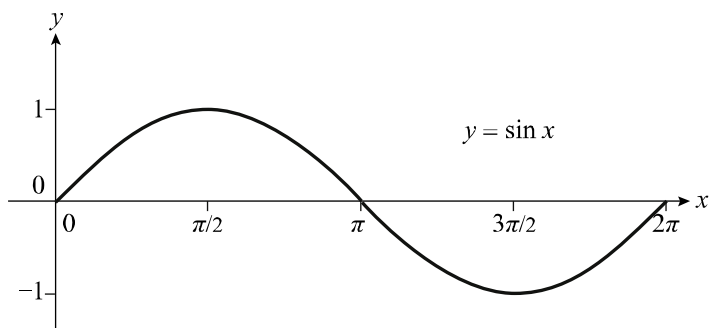
הזווית	הרביע	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha, \cot \alpha$
$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$	I	חיובי	חיובי	חיובי
$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$	II	חיובי	שלילי	שלילי
$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$	III	שלילי	שלילי	חיובי
$\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$	IV	שלילי	חיובי	שלילי

שאלה 6

עבור כל אחת מהזוויות, ציינו באיזה רביע נופלת הנקודה A (שימו לב שעבור הזוויות שהן כפולה של $\pi/2$, הנקודה משותפת לשני רביעים).

א. 200° ב. 300° ג. π ד. $\pi/2$ ה. $8\pi/5$

עתה נתבונן בגרפים של הפונקציות הטריגונומטריות $\sin, \cos, \tan, \cot$ בקטע $[0, 2\pi]$:



התבוננות זו מעלה את ההבחנות הבאות:

- א. **טווח הערכים של הסינוס והקוסינוס:** לכל זווית α מתקיים $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$, $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$. תכונות אלה נובעות גם מההגדרה של פונקציות אלה בעזרת המעגל. יתרה מכך, הקטע $[-1, 1]$ הוא התמונה של כל אחת מהפונקציות $\sin, \cos$: כל מספר $-1 \leq x \leq 1$ הוא סינוס של זווית כלשהי, וקוסינוס של זווית כלשהי.

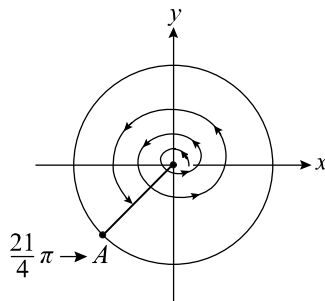
ב. **טווח הערכים של הטנגנס והקוטנגנס:** טווח זה אינו מוגבל, כלומר, התמונה של פונקציית הטנגנס היא הישר הממשי כולו, וכמותה גם תמונת פונקציית הקוטנגנס. לדוגמה, ככל שזווית חדה α מתקרבת ל- $\pi/2$, כך יגדל ערך הטנגנס, וערך זה יכול לגדול ללא הגבלה (שהרי, היחס בין אורכי הניצבים במשולש יכול להיות גדול כרצוננו). בדומה, אם נתבונן על זווית קהה α ההולכת ומתקרבת ל- $\pi/2$, נגלה ש- $\tan \alpha$ יכול לקטון ללא הגבלה (כלומר לגדול בערכו המוחלט, בעודו שלילי).

ג. **תחומי עלייה וירידה:**

- פונקציית הסינוס עולה בקטע $[0, \pi/2]$, יורדת בקטע $[\pi/2, 3\pi/2]$, ועולה שוב בקטע $[3\pi/2, 2\pi]$.
- פונקציית הקוסינוס יורדת בקטע $[0, \pi]$, ועולה בקטע $[\pi, 2\pi]$.
- פונקציית הטנגנס עולה בכל אחד מהקטעים שבהם היא מוגדרת: $(0, \pi/2)$, $(\pi/2, 3\pi/2)$, $(3\pi/2, 2\pi)$.
- פונקציית הקוטנגנס יורדת בכל אחד מהקטעים שבהם היא מוגדרת: $(0, \pi)$, $(\pi, 2\pi)$.

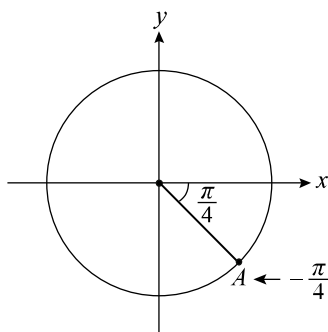
פונקציות טריגונומטריות בישר הממשי

ראינו כיצד המעגל מאפשר להרחיב את הגדרת הפונקציות הטריגונומטריות לתחום הזוויות $[0, 2\pi]$. כעת נרחיב את הגדרת הפונקציות הטריגונומטריות לישר הממשי כולו, כך שנוכל להציב בפונקציית הסינוס, למשל, גם 100 רדיאנים או 1000° ואפילו -100.



אם α מספר ממשי חיובי, נדמיין מחוג OA שקצהו האחד (O) קבוע בראשית הצירים וקצהו השני (A) נע על פני מעגל היחידה. המחוג מתחיל את תנועתו כשהוא מתלכד עם הכיוון החיובי של ציר ה- x , ונע נגד כיוון השעון כמות של α רדיאנים; במילים אחרות, הנקודה הנעה A עוברת על פני המעגל מרחק של α יחידות מידה. אם $\alpha > 2\pi$ אז אחרי שהמחוג הסתובב סיבוב שלם (2π רדיאנים) הוא הגיע לנקודת ההתחלה והמשיך להסתובב, עד שכמות הרדיאנים הכללית שעבר במהלך הסיבוב היא α . לאחר סיום תנועתו של המחוג, נתבונן במיקומה של הנקודה A על מעגל היחידה. בדרך זו התאמנו נקודה A על מעגל היחידה לכל α חיובי.

דוגמה: עבור $\alpha = \frac{21}{4}\pi$, נציג: $\alpha = \frac{16+5}{4}\pi = 4\pi + \frac{5}{4}\pi$. המחוג ינוע שני סיבובים שלמים ובנוסף עוד $\frac{5}{4}\pi$ רדיאנים.



איור 1

התשובה בעמוד 166

גם עבור $\alpha \leq 0$ מותאמת נקודה A על מעגל היחידה, המתקבלת מתנועת המחוג $|\alpha|$ רדיאנים עם כיוון השעון.

דוגמה: עבור $\alpha = -\frac{\pi}{4}$ הנקודה A מתקבלת מסיבוב עם כיוון השעון של שמינית המעגל. ניתן לקבל אותה גם על ידי סיבוב נגד כיוון השעון של שבע שמיניות המעגל, כלומר $-\frac{\pi}{4} + 2\pi$ רדיאנים.

שאלה 7

עבור כל אחת מהזוויות הבאות, מצאו באיזה רביע נופלת הנקודה המתאימה על מעגל היחידה. ציינו זווית בתחום $[0, 2\pi)$ שמתאימה לאותה נקודה על מעגל היחידה.

א. $9\frac{1}{4}\pi$ ב. $-\frac{3}{4}\pi$ ג. 900° ד. 412° ה. -800°

בדרך שתוארה, נראה כל מספר ממשי α כזווית **במובן הרחב** של המילה. לכל זווית כזו מתאימה נקודה A על מעגל היחידה; והערכים $\sin \alpha, \cos \alpha, \tan \alpha, \cot \alpha$ מוגדרים בדיוק כמקודם –

• $\sin \alpha$ הוא שיעור- y של הנקודה A .

• $\cos \alpha$ הוא שיעור- x של הנקודה A .

• $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ (מוגדר כאשר $\cos \alpha \neq 0$).

• $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ (מוגדר כאשר $\sin \alpha \neq 0$).

הוספת 2π לזווית לא תשנה את הנקודה המתאימה לה על מעגל היחידה. אותו הכלל נכון לגבי כל כפולה שלמה של 2π . לכן מתקיימת **תכונת המחזוריות** של הפונקציות הטריגונומטריות: הוספת כפולה שלמה של 2π אינה משנה את ערכן – לכל k שלם,

$$\sin(\alpha + 2\pi k) = \sin \alpha$$

$$\cos(\alpha + 2\pi k) = \cos \alpha$$

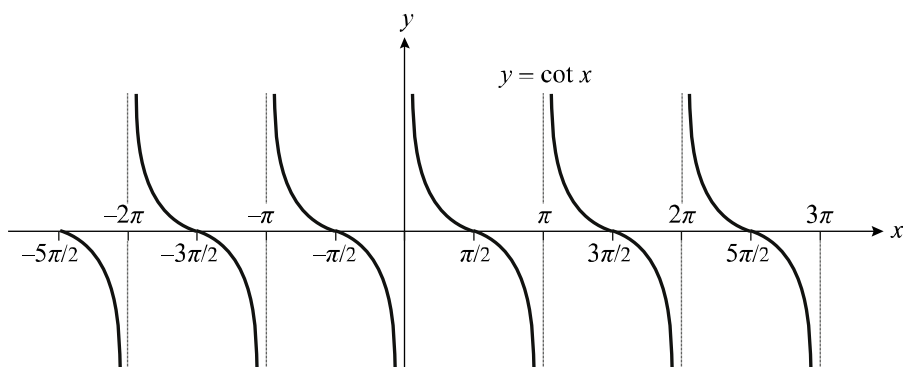
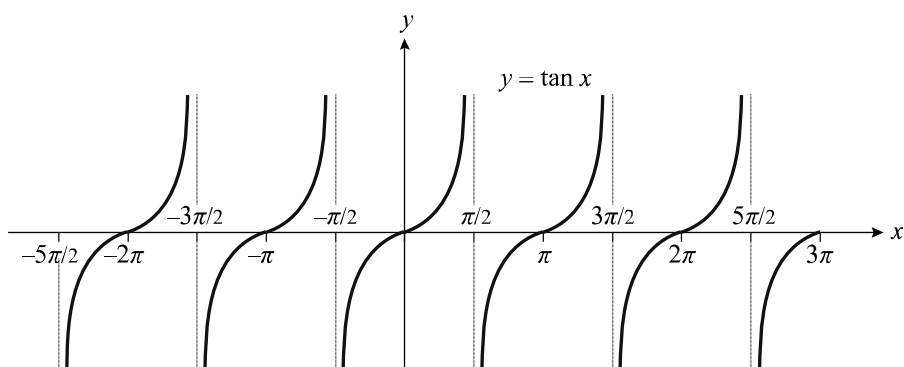
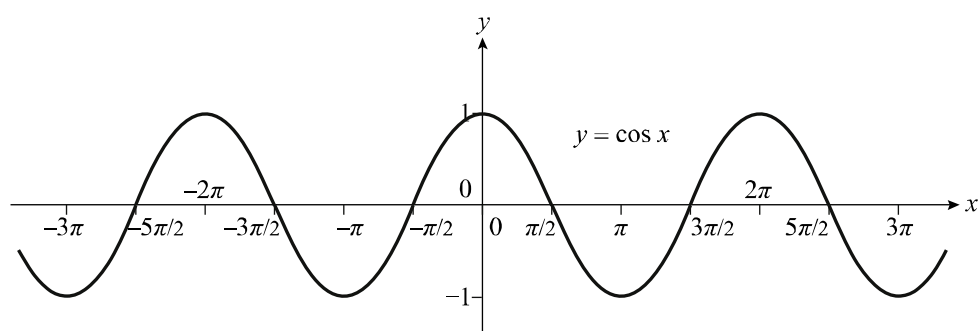
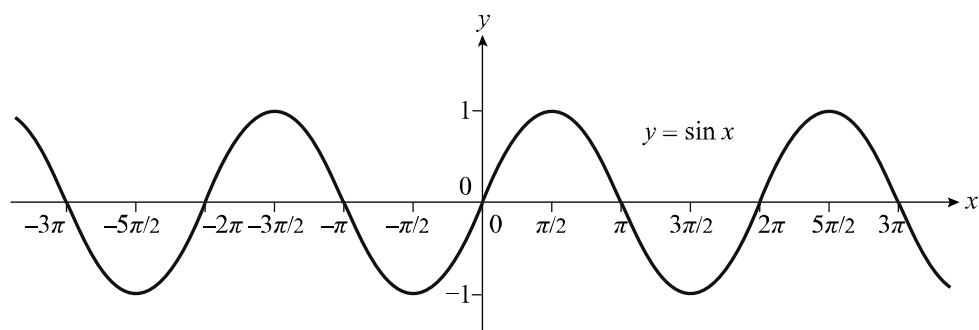
גם הפונקציות $\tan, \cot$ מקיימות תכונת מחזוריות זו, אך כפי שנראה עוד מעט, הן מקיימות תכונת מחזוריות חזקה יותר, והוספת כפולה שלמה של π אינה משנה את ערכן:

$$\tan(\alpha + \pi k) = \tan \alpha$$

$$\cot(\alpha + \pi k) = \cot \alpha$$

מתכונת המחזוריות נובע שכדי לשרטט את הגרף של כל אחת מהפונקציות הטריגונומטריות היסודיות $\sin, \cos, \tan, \cot$, די לשרטט אותן בקטע $[0, 2\pi]$ ולשכפל את השרטוט שוב ושוב.

הנה הגרפים המלאים:



בשאלה הבאה היעזרו בתכונת המחזוריות, ובערכים ידועים של הפונקציות הטריגונומטריות, כדי לחשב את הערכים המבוקשים.

שאלה 8

חשבו (ללא עזרת מחשבון):

א. $\sin 390^\circ$ ב. $\tan(9\pi/4)$ ג. $\cos(-\pi/2)$ ד. $\cos(12\pi)$ ה. $\cot 480^\circ$

התשובה בעמוד 166

זהויות טריגונומטריות יסודיות

נכיר עתה מספר מצומצם של זהויות טריגונומטריות, שישמשו אותנו לכל אורך לימודינו בתחום. זהויות אלה יוצגו ללא הוכחה, ועל בסיסן נוכיח את כל הזהויות האחרות שנכיר.

א. לכל α ממשי, $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$
 ב. לכל α, β ממשיים, $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$
 ג. לכל α, β ממשיים, $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$
 ד. לכל α ממשי, $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$
 ה. לכל α ממשי, $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$

הערות:

א. הזהות בסעיף א מוכרת לנו ואף הוכחנו אותה, עבור זוויות חדות. החידוש הוא בנכונותה לכל הערכים הממשיים.
 ב. הזהויות בסעיפים ב ו-ג נקראות 'נוסחאות הסינוס והקוסינוס של סכום זוויות'.
 ג. משמעות הזהויות בסעיפים ד ו-ה היא שפונקציית הסינוס היא אי-זוגית, ופונקציית הקוסינוס היא זוגית. כפי שראינו בשיעור 6, הגרף של פונקציה אי-זוגית סימטרי ביחס לראשית, והגרף של פונקציה זוגית סימטרי ביחס לציר ה- y . ניתן להיווכח בכך עבור הפונקציות $\sin, \cos$ מהתבוננות בגרפים שבעמוד הקודם.

בהמשך השיעור נלמד איך להוכיח זהויות רבות כמסקנה מזהויות יסודיות אלה. לעת עתה, נדגים כיצד ניתן להיעזר בהן לחישוב ערכים של פונקציות טריגונומטריות בזוויות שאינן חדות.

א. נחשב את $\sin 225^\circ, \cos 225^\circ$:

$$\begin{aligned} \sin 225^\circ &= \sin(180^\circ + 45^\circ) = \sin 180^\circ \cos 45^\circ + \cos 180^\circ \sin 45^\circ \\ &= 0 \cdot \cos 45^\circ + (-1) \cdot \sin 45^\circ = -\sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos 225^\circ &= \cos(180^\circ + 45^\circ) = \cos 180^\circ \cos 45^\circ - \sin 180^\circ \sin 45^\circ \\ &= (-1) \cdot \cos 45^\circ - 0 \cdot \sin 45^\circ = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

ב. עבור הזווית $\alpha = 7\pi/4$ נחשב את $\sin \alpha, \cos \alpha$:

$$\sin \alpha = \sin(\alpha - 2\pi) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos \alpha = \cos(\alpha - 2\pi) = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

שאלה 9

חשבו (ללא עזרת מחשבון):

א. $\sin 210^\circ$ ב. $\cos 210^\circ$ ג. $\sin 330^\circ$ ד. $\cos 330^\circ$

התשובה בעמוד 166

שאלה 10

תהי $\pi < \alpha < 3\pi/2$ זווית המקיימת $\sin \alpha = -0.6$. מצאו את $\cos \alpha$ ואת $\tan \alpha$.

התשובה בעמוד 167

מסקנות מהזהויות היסודיות

מהזהויות היסודיות מתקבלות מספר מסקנות חשובות:

א. נוסחאות הסינוס והקוסינוס של ההפרש:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

ב. הוספת π לזווית: $\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$, $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$

$$\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha, \cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha$$

ג. סינוס של זווית משלימה: $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \quad \text{ד. טנגנס של סכום:}$$

$$\cot(\alpha + \beta) = \frac{\cot \alpha \cot \beta - 1}{\cot \alpha + \cot \beta} \quad \text{ה. קוטנגנס של סכום:}$$

ו. אי־זוגיות הטנגנס והקוטנגנס: $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$, $\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$

הערות:

א. נוכל לכתוב את הנוסחאות לסינוס וקוסינוס של סכום והפרש זוויות באופן מקוצר כך:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

משמעות הסימן $\mp$ באגף ימין היא סימן הפוך לסימן $\pm$ שבאגף שמאל.

ב. מהנוסחאות שבסעיף ב, ניתן לראות שמחזור הפונקציות $\tan, \cot$ הוא π .

$\alpha, \beta < \pi$ זהויות אלה תקפות לכל α, β ממשיים שעבורם שני האגפים מוגדרים.

נוכיח חלק מהנוסחאות, ואת השאר – תוכיחו אתם בתשובה לשאלה 11. הוכחת הנוסחאות בכוחות עצמכם היא הדרך הטובה ביותר להבין ולזכור אותן.

כדי להוכיח את נוסחאות הסינוס והקוסינוס של ההפרש, ניעזר בזהויות עבור סינוס וקוסינוס הסכום, ובתכונות אי־זוגיות הסינוס וזוגיות הקוסינוס:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha - \beta) &= \sin(\alpha + (-\beta)) = \sin \alpha \cos(-\beta) + \cos \alpha \sin(-\beta) \\ &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \cdot (-\sin \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos(\alpha + (-\beta)) = \cos \alpha \cos(-\beta) - \sin \alpha \sin(-\beta) \\ &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \cdot (-\sin \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta\end{aligned}$$

שאלה 11

הוכיחו את הזהויות בסעיפים ב-ו לעיל.

התשובה בעמוד 167

שאלה 12

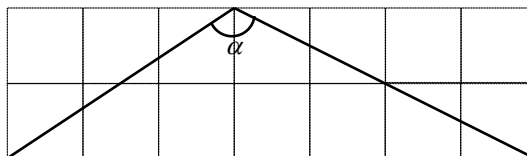
מצאו זהויות המבטאות כל ביטוי בעזרת ערכי הפונקציות הטריגונומטריות היסודיות ב־ α וב־ β :

א. $\sin(\alpha + \pi/2)$ ב. $\cos(\alpha + \pi/2)$ ג. $\tan(\alpha - \beta)$

התשובה בעמוד 168

שאלה 13

חשבו את $\tan \alpha$ עבור הזווית α שבאיור:



התשובה בעמוד 168

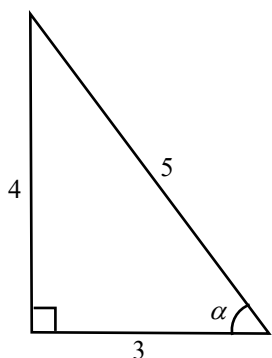
(הערה: הניחו כי כל משבצת באיור היא ריבוע).

הפונקציות הטריגונומטריות הפוכות

כשהגדרנו את הפונקציות הטריגונומטריות ראינו כיצד ניתן להיעזר בהן לחישוב אורכי צלעות במשולש ישר-זווית. לעתים המצב הוא הפוך: נתונים אורכי הצלעות במשולש, ואנו מעוניינים לחשב את זוויותיו. נתבונן, למשל, במשולש ישר-זווית שאורך ניצביו הם 3 ו-4. אורך היתר הוא, לפי משפט פיתגורס, $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. נסמן את הזווית שמול היתר שאורכו 4 ב־ α . נבחין שמתקיים:

$$\sin \alpha = \frac{4}{5} = 0.8$$

על סמך מידע זה, נרצה לחשב את הזווית α .



לצורך כך, נדרשת היכולת לשחזר את הזווית על פי ערך של פונקציה טריגונומטרית בזווית זו.

נזכור כי בהינתן פונקציה חד־חד־ערכית $f : A \rightarrow B$, הפונקציה ההפוכה f^{-1} מוגדרת על סמך השקילות הבאה:

$$f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

לכן, כדי לפתור את המשוואה $\sin \alpha = 0.8$ (ובאופן כללי, משוואה מהצורה $\sin \alpha = y$, עבור מספר y נתון), נדרשת פונקציה הפוכה לפונקציית הסינוס.

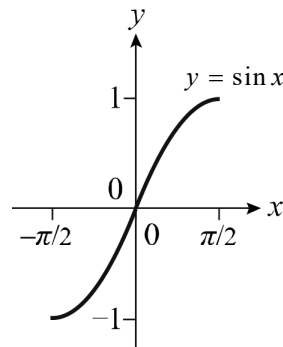
עיון קצר בגרף של פונקציית הסינוס בישר הממשי מעלה שפונקציה זו אינה חד־חד־ערכית. למשל, מחזוריות הפונקציה גוררת שלכל זווית α מתקיים

$$\sin \alpha = \sin(\alpha + 2\pi) = \sin(\alpha + 4\pi) = \dots$$

ומכאן שכל ערך של הפונקציה מתקבל עבור מספר אינסופי של זוויות שונות.

לכן, כדי להגדיר פונקציה הפוכה, עלינו לעבור לתחום מצומצם יותר, שבו פונקציית הסינוס היא חד־חד־ערכית.

נתבונן בצמצום פונקציית הסינוס לקטע $[-\pi/2, \pi/2]$:

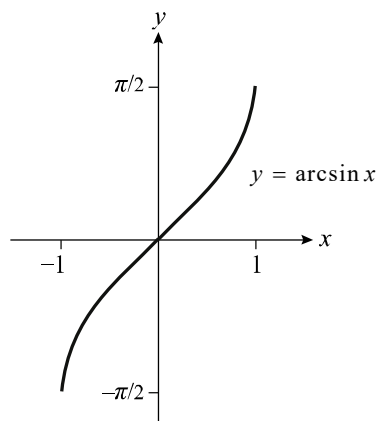


הפונקציה המצומצמת עולה, ולכן חח"ע. תמונתה היא הקטע $[-1, 1]$.

לפונקציה זו יש, אפוא, פונקציה הפוכה. תחום ההגדרה של הפונקציה ההפוכה הוא $[-1, 1]$ והטווח שלה הוא $[-\pi/2, \pi/2]$. הפונקציה ההפוכה נקראת **פונקציית הסינוס ההפוכה** וסימונה הוא $\arcsin$.

קיבלנו את הפונקציה $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$

גרף הפונקציה נראה כך:



לפי הגדרת הפונקציה ההפוכה, מתקיימת השקילות:

$$\sin \alpha = y \Leftrightarrow \alpha = \arcsin y, \quad \alpha \in [-\pi/2, \pi/2], \quad y \in [-1, 1]$$

$$\arcsin \frac{1}{2} = 30^\circ = \frac{\pi}{6} \quad \text{לדוגמה, מהערך } \sin 30^\circ = 1/2 \text{ נקבל}$$

כעת נשוב להתבונן במשולש ישר הזווית, שאורכי צלעותיו הם 3, 4 ו-5.

$$\sin \alpha = \frac{4}{5} = 0.8 \quad \text{ראינו שמתקיים:}$$

כעת נוכל לחשב את הזווית α . זווית זו היא חדה, ובוודאי נמצאת בתחום $[-\pi/2, \pi/2]$.

$$\alpha = \arcsin 0.8 \quad \text{מכאן:}$$

$$\alpha \approx 0.927 \quad \text{ניעזר במחשבון כדי למצוא ערך זה בדיוק הרצוי לנו: ברדיאנים -}$$

$$\alpha \approx 53.13^\circ \quad \text{ובמעלות -}$$

שאלה 14

א. חשבו (ללא עזרת מחשבון):

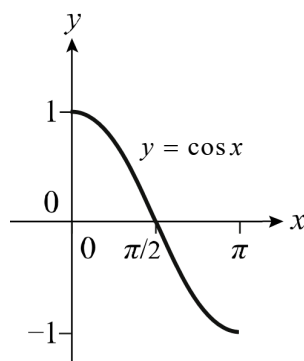
$$\arcsin(-1/2) \quad \text{(iii)} \quad \arcsin(\sqrt{3}/2) \quad \text{(ii)} \quad \arcsin(\sqrt{2}/2) \quad \text{(i)}$$

ב. במשולש ישר-זווית שאורכי ניצביו הם 3 ו-5, חשבו את גודלי כל הזוויות, ובטאו אותם במעלות וברדיאנים. היעזרו במחשבון.

ג. נגדיר: $y = \sin 100^\circ$. חשבו את $\arcsin y$.

התשובה בעמוד 168

כעת נגדיר פונקציה הפוכה לפונקציית הקוסינוס. לצורך כך נצמצם את הפונקציה לקטע $[0, \pi]$. גרף פונקציית הקוסינוס בקטע זה נראה כך:

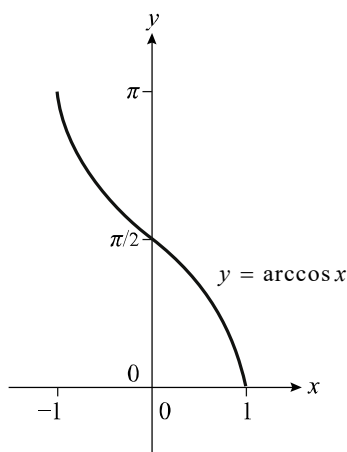


הפונקציה המצומצמת יורדת, ולכן חח"ע. ותמונתה היא $[-1, 1]$.

הפונקציה ההפוכה לפונקציה זו היא **פונקציית הקוסינוס ההפוכה** המסומנת $\arccos$. מתקבלת הפונקציה:

$$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$

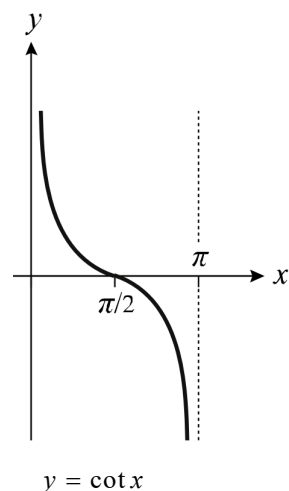
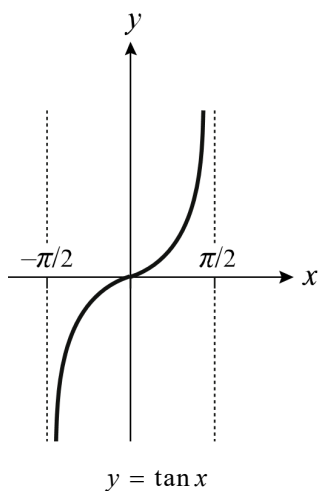
גרף הפונקציה מוצג באיור הבא:



לדוגמה, אם נתון כי $0 \leq \alpha \leq 180^\circ$ ו- $\cos \alpha = -0.3$,

$$\alpha = \arccos(-0.3) \approx 107.46^\circ \quad \text{נקבל}$$

באופן דומה, נגדיר פונקציות הפוכות לפונקציות הטנגנס והקוטנגנס: נצמצם את פונקציית הטנגנס לקטע $(-\pi/2, \pi/2)$, ואת פונקציית הקוטנגנס לקטע $(0, \pi)$.

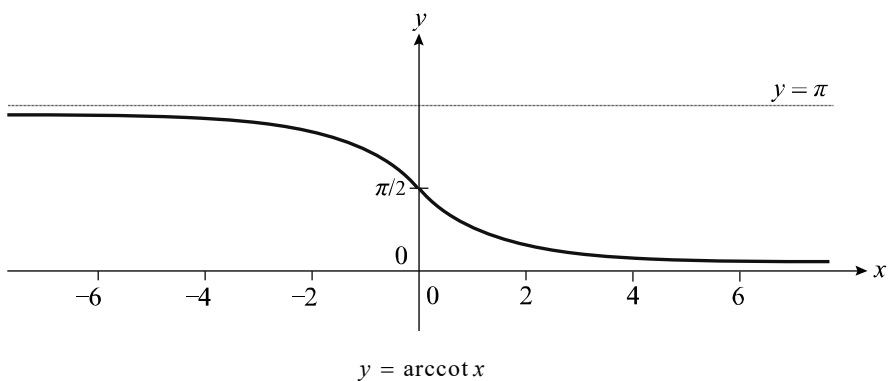
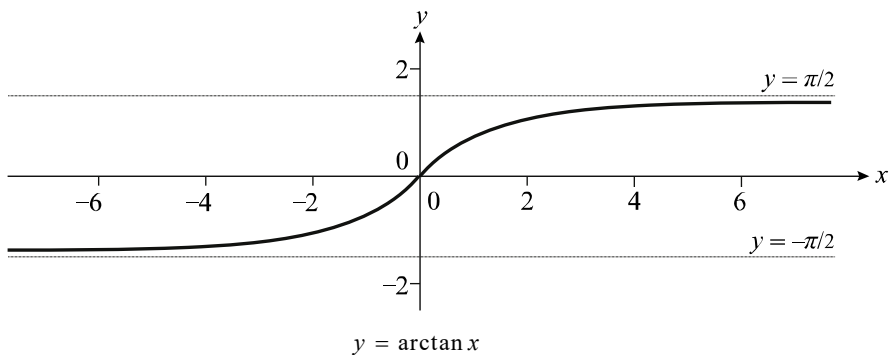


כל אחת מהפונקציות מונוטונית בתחומה, ולכן חח"ע. כל אחת מהפונקציות מקבלת בתחומה את כל הערכים הממשיים האפשריים, כלומר, תמונתה היא $\mathbb{R}$. הפונקציות ההפוכות לפונקציות אלה הן פונקציית הטנגנס ההפוכה, $\arctan$, ופונקציית הקוטנגנס ההפוכה, arccot :

$$\arctan : \mathbb{R} \rightarrow (-\pi/2, \pi/2)$$

$$\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$$

הגרפים של פונקציות אלה נראים כך:



בשאלות הבאות נתרגל את השימוש בכל הפונקציות הטריגונומטריות ההפוכות שהכרנו.

שאלה 15

- א. מצאו זווית חדה α המקיימת $\tan \alpha = 3$ (היעזרו במחשבון).
 ב. חשבו את $\operatorname{arccot} \sqrt{3}$ (ללא עזרת מחשבון).
 ג. במשולש $\triangle ABC$ שבו $\angle C = 90^\circ$, $c = \overline{AB} = 7$, $b = \overline{AC} = 5$, מצאו את הזווית $\angle A$ (היעזרו במחשבון ובפונקציית הקוסינוס ההפוכה).
 ד. במשולש $\triangle ABC$ שבו $\angle C = 90^\circ$, $a = \overline{BC} = 3$, $b = \overline{AC} = 7$, מצאו את הזווית $\angle A$ (היעזרו במחשבון ובפונקציית הטנגנס ההפוכה).

התשובה בעמוד 169

שאלה 16

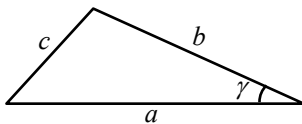
הוכיחו את הזהויות הבאות:

- א. לכל $-1 \leq y \leq 1$:
 $\sin(\arcsin y) = y$
 $\cos(\arccos y) = y$
 ב. לכל $-\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2$:
 $\arcsin(\sin \alpha) = \alpha$
 $\arccos(\cos \alpha) = \alpha$
 ג. לכל $0 \leq y \leq 1$:
 $\arcsin y + \arccos y = \frac{\pi}{2}$

התשובה בעמוד 169

משפט הקוסינוסים

המשפט הבא מבטא קשר חשוב בין הזוויות והצלעות במשולש כלשהו.



משפט הקוסינוסים

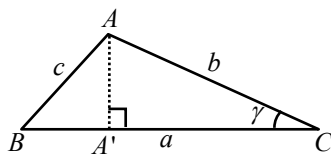
במשולש שבו אורכי הצלעות הם a, b, c , והזווית מול הצלע c היא γ , מתקיים

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$$

הנוסחה שבמשפט דומה לנוסחה שבמשפט פיתגורס. דמיון זה אינו מקרי, שכן משפט הקוסינוסים הוא הכללה של משפט פיתגורס. במקרה שהזווית γ היא ישרה, מתקיים $\cos \gamma = 0$, והנוסחה שבמשפט הקוסינוסים מתלכדת עם זו שבמשפט פיתגורס.

הוכחה

נציג הוכחה של המשפט במקרה שבו כל זוויות המשולש הן חדות. במקרה שיש במשולש זווית ישרה או קהה, ניתן להוכיח את המשפט בעזרת שיקולים דומים.



נסמן את קודקודי המשולש ב- A, B, C , ויהי AA' האנך לצלע BC . המשולש $\triangle AA'C$ ישר-זווית. לכן:

$$\sin \gamma = \frac{\overline{AA'}}{b}, \quad \cos \gamma = \frac{\overline{A'C}}{b}$$

מכאן

$$\overline{AA'} = b \sin \gamma, \quad \overline{A'C} = b \cos \gamma$$

$$\Rightarrow \overline{BA'} = \overline{BC} - \overline{A'C} = a - b \cos \gamma$$

המשולש $\triangle AA'B$ ישר-זווית. לפי משפט פיתגורס:

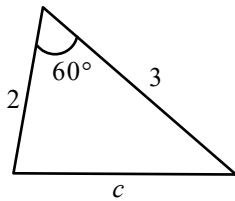
$$\begin{aligned} c^2 &= \overline{BA'}^2 + \overline{AA'}^2 = (a - b \cos \gamma)^2 + (b \sin \gamma)^2 \\ &= a^2 - 2ab \cos \gamma + b^2 \cos^2 \gamma + b^2 \sin^2 \gamma \\ &= a^2 - 2ab \cos \gamma + b^2 (\sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma) \\ &= a^2 - 2ab \cos \gamma + b^2 \end{aligned}$$

□

בדוגמאות הבאות נסתמך על משפט הקוסינוסים לחישוב גודליהן של צלעות וזוויות במשולש:

א. בהינתן אורכי שתי צלעות וגודל הזווית שביניהן, חישוב אורך הצלע השלישית:

נניח שנתונים אורכי הצלעות $a = 2$, $b = 3$ ונתונה הזווית שביניהן $\gamma = 60^\circ$. נחשב את אורך הצלע השלישית:



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma = 4 + 9 - 12 \cos 60^\circ = 13 - 12 \cdot \frac{1}{2} = 7$$

$$c = \sqrt{7}$$

מכאן:

ב. בהינתן אורכי שלוש צלעות המשולש, חישוב זוויותיו:

נניח שנתונים האורכים $a = 7$, $b = 8$, $c = 10$

נחשב את גודל הזווית γ שבין הצלעות a ו- b :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$$

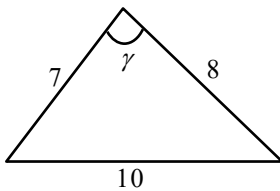
$$10^2 = 7^2 + 8^2 - 2 \cdot 7 \cdot 8 \cdot \cos \gamma$$

$$\Rightarrow 112 \cos \gamma = 7^2 + 8^2 - 10^2 = 13$$

$$\Rightarrow \cos \gamma = \frac{13}{112}$$

$$\gamma = \arccos \frac{13}{112} \approx 83.33^\circ$$

מכאן נקבל:



שאלה 17

א. חשבו את כל זוויות המשולש בדוגמה האחרונה (שבה אורכי הצלעות הם 7, 8, 10).

ב. חשבו את זוויות המשולש שאורכי צלעותיו הם 3, 4, 6.

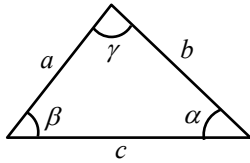
ג. נתון משולש שאורכי שתיים מצלעותיו הם 4 ו-5, וגודל הזווית שביניהן הוא 40° .

חשבו את אורך הצלע השלישית.

התשובה בעמוד 170

משפט הסינוסים

במשפט הבא מתואר קשר יסודי נוסף בין צלעות וזוויות המשולש. משפט זה משלים את משפט הקוסינוסים בחישובי גודלי הצלעות והזוויות במשולש.

**משפט הסינוסים**

במשולש, שבו אורכי הצלעות הם a, b, c , גודלי הזוויות שמולן הם α, β, γ (בהתאמה), ורדיוס המעגל החוסם הוא R , מתקיימים השוויונות

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

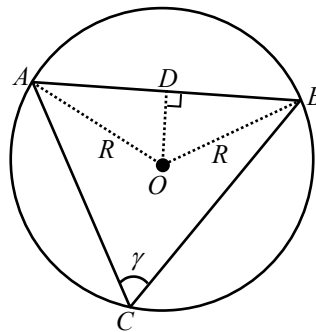
נוכל לנסח את משפט הסינוסים כך: היחס בין אורך הצלע לסינוס הזווית שמולה הוא קבוע במשולש (כלומר זהה בין כל הצלעות), ושווה לקוטר המעגל החוסם את המשולש.

הוכחת המשפט

נתבונן במשולש $\triangle ABC$ ובמעגל החוסם אותו.

נסמן ב- D את אמצע הצלע AB . המשולש $\triangle AOB$ הוא שווה-שוקיים $(\overline{OA} = \overline{OB} = R)$.

לפי משפט 8.27, התיכון OD לצלע AB הוא גם חוצה-זווית ואנך.



לפי משפט 8.35, הזווית ההיקפית γ שווה למחצית הזווית המרכזית $\angle AOB$. מכיוון

ש- OD חוצה את הזווית $\angle AOB$, מתקבל השוויון: $\angle DOB = \gamma$

מהגדרת הסינוס במשולש ישר-זווית נקבל $\sin \gamma = \sin \angle DOB = \frac{\overline{DB}}{R}$

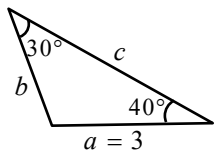
היות ש- D הוא אמצע הצלע AB , מתקיים $\overline{DB} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{c}{2}$

לכן $\sin \gamma = \frac{c}{2R} \Rightarrow \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$

באותו אופן ניתן להוכיח שגם $\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$, $\frac{b}{\sin \beta} = 2R$

ולכן $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$ □

נוכל להשתמש במשפט הסינוסים, למשל, כשנתונות צלע של המשולש ושתיים מזוויותיו.



לדוגמה, אם במשולש מתקיים $a = 3$, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 40^\circ$, אז לפי משפט הסינוסים

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$$

$$b = a \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = 3 \cdot \frac{\sin 40^\circ}{\sin 30^\circ} \approx 3.86$$

ולכן

שאלה 18

חשבו את אורך הצלע c במשולש שבדוגמה האחרונה.

התשובה בעמוד 171

שאלה 19

נתון משולש שאורכי צלעותיו הם 2, 5, 6. מצאו את רדיוס המעגל החוסם את המשולש.

התשובה בעמוד 171

זהויות של זווית כפולה

לאחר שנוכחנו בשימושיות הפונקציות הטריגונומטריות בפתרון בעיות גיאומטריות, נחזור לפיתוח של זהויות טריגונומטריות.

זהויות הזווית הכפולה מבטאות את ערכן של פונקציות טריגונומטריות בזווית 2α , על פי ערכן בזווית α . בהוכחתן נעשה שימוש בביטוי $2\alpha = \alpha + \alpha$ ובהויות המוכרות עבור סכום זוויות.

נפתח בביטוי $\sin 2\alpha$. על פי הזהות $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ נקבל

$$\sin 2\alpha = \sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha$$

$$\boxed{\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha}$$

כלומר:

נעבור לביטוי $\cos 2\alpha$. על פי הזהות $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$

$$\cos 2\alpha = \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha$$

$$\boxed{\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}$$

כלומר:

בעזרת הזהות $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$, נוכל לבטא את $\cos 2\alpha$ באמצעות $\sin \alpha$ או $\cos \alpha$

בלבד:

$$\cos 2\alpha = 1 - \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

נציג $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$ ונקבל

$$\boxed{\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha}$$

כלומר:

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha)$$

נציג $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$ ונקבל

$$\boxed{\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1}$$

הזהויות עבור סינוס וקוסינוס של זווית כפולה הן שימושיות מאוד, ומופיעות לעתים קרובות בפיתוחים טריגונומטריים.

שאלה 20

התשובה בעמוד 172

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}, \quad \cot 2\alpha = \frac{\cot^2 \alpha - 1}{2 \cot \alpha} \quad \text{הוכיחו את הזהויות:}$$

שאלה 21

התשובה בעמוד 172

$$\sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}, \quad \cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \quad \text{הוכיחו את הזהויות:}$$

שאלה 22

התשובה בעמוד 172

א. מצאו זהות המבטאת את $\sin 3\alpha$ על פי $\sin \alpha$ בלבד.
ב. מצאו זהות המבטאת את $\cos 3\alpha$ על פי $\cos \alpha$ בלבד.

סכום, הפרש ומכפלת פונקציות טריגונומטריות

הזהויות הבאות שנפתח מאפשרות להציג סכום של שני סינוסים, $\sin \alpha + \sin \beta$, או סכום של שני קוסינוסים, $\cos \alpha + \cos \beta$, כמכפלה.

לצורך פיתוחן, נבחר בזהויות האלגבריות הבאות:

$$\alpha = \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\beta = \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2}$$

כעת ניעזר בנוסחאות עבור סכום והפרש זוויות:

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2} \right) \\ (1) \quad &= \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin \beta &= \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2} \right) \\ (2) \quad &= \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} - \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \end{aligned}$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

נחבר את הזהויות:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2} \right) \\ (3) \quad &= \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} - \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \end{aligned}$$

באופן דומה:

$$\begin{aligned} \cos \beta &= \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2} \right) \\ (4) \quad &= \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \end{aligned}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

נחבר ונקבל:

כעת נפתח נוסחאות להפרש שני סינוסים או קוסינוסים.

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \quad \text{מחיסור הזהות (2) מ־(1) נקבל}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

כלומר

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

מחיסור הזהות (4) מ־(3) נקבל:

שאלה 23

הציגו את הביטויים הבאים כמכפלות:

$$\text{א. } \cos x + \cos 3x \quad \text{ב. } 2 \sin x + \sqrt{2} \quad \text{ג. } \sin x - \cos x$$

התשובה בעמוד 173

לעתים נרצה לעבור מביטוי מכפלה של שתי פונקציות טריגונומטריות (סינוס או קוסינוס) לביטוי סכום.

ניתן לעשות זאת בעזרת הזהויות הבאות:

$$\begin{aligned} \sin \alpha \sin \beta &= \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2} \\ \cos \alpha \cos \beta &= \frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{2} \\ \sin \alpha \cos \beta &= \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2} \end{aligned}$$

שאלה 24

הוכיחו את שלוש הזהויות לעיל.

התשובה בעמוד 173

תרגול של זהויות טריגונומטריות

על סמך הזהויות הטריגונומטריות הבסיסיות, והזהויות הנוספות שהוכחנו כמסקנות מהן נוכל להוכיח זהויות רבות אחרות. תרגול ההוכחה של זהויות תורם להיכרות עם הפונקציות הטריגונומטריות והיחסים שביניהן. נתבונן בכמה דוגמאות:

$$\text{א. נוכיח את הזהות} \quad \tan \alpha + \cot \alpha = \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha}$$

הוכחה: לפי הגדרת הטנגנס והקוטנגנס,

$$\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha}$$

במהלך ההוכחה נעזרנו בזהות הבסיסית $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

$$\text{ב. נוכיח:} \quad \tan \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta}$$

הוכחה: לפי הנוסחאות של סכום פונקציות טריגונומטריות,

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

נוכל להניח ש- $\cos \alpha + \cos \beta \neq 0$, כי ביטוי זה מופיע במכנה הזהות המקורית.

בפרט, נקבל ש- $\cos((\alpha - \beta)/2) \neq 0$. נחלק את שתי הזהויות האחרונות זו בזו:

$$\frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta} = \frac{2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}}{2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}} = \frac{\sin \frac{\alpha + \beta}{2}}{\cos \frac{\alpha + \beta}{2}} = \tan \frac{\alpha + \beta}{2}$$

ג. נוכיח שעבור זוויות α, β, γ במשולש שאינו ישר-זווית, מתקיים:

$$\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma = \tan \alpha \tan \beta \tan \gamma$$

הוכחה:

מכיוון ש- α, β, γ הן זוויות במשולש, מתקיים $\alpha + \beta + \gamma = \pi$

לפיכך, $\tan \gamma = \tan(\pi - \alpha - \beta)$

ממחזוריות ואיזוגיות הטנגנס נקבל

$$\tan \gamma = \tan(-\alpha - \beta) = -\tan(\alpha + \beta)$$

מהנוסחה לטנגנס סכום זוויות נקבל

$$\tan \gamma = -\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{\tan \alpha \tan \beta - 1}$$

$$\tan \gamma (\tan \alpha \tan \beta - 1) = \tan \alpha + \tan \beta \quad \text{מכאן}$$

$$\tan \alpha \tan \beta \tan \gamma - \tan \gamma = \tan \alpha + \tan \beta \quad \text{כלומר}$$

$$\tan \alpha \tan \beta \tan \gamma = \tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma \quad \text{ולכן}$$

◁ טנגנס של זווית ישרה אינו מוגדר,
שכן $\cos(\pi/2) = 0$.

שאלה 25

הוכיחו את הזהויות הבאות:

א. $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + \sin 2\alpha$

ב. $\frac{1}{\cos \alpha} - \cos \alpha = \tan \alpha \sin \alpha$

ג. $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$

ד. $\sin^2(\alpha + \beta) + \sin^2(\alpha - \beta) = 2\sin^2 \alpha \cos^2 \beta + 2\cos^2 \alpha \sin^2 \beta$

ה. $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\cot \alpha + \cot \beta}{\cot \alpha \cot \beta - 1}$

ו. $\sin^2\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1 + \sin 2\alpha}{2}$

ז. $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$

ח. עבור זוויות α, β, γ במשולש: $\cot \alpha \cot \beta + \cot \alpha \cot \gamma + \cot \beta \cot \gamma = 1$

התשובה בעמוד 174

משוואות טריגונומטריות

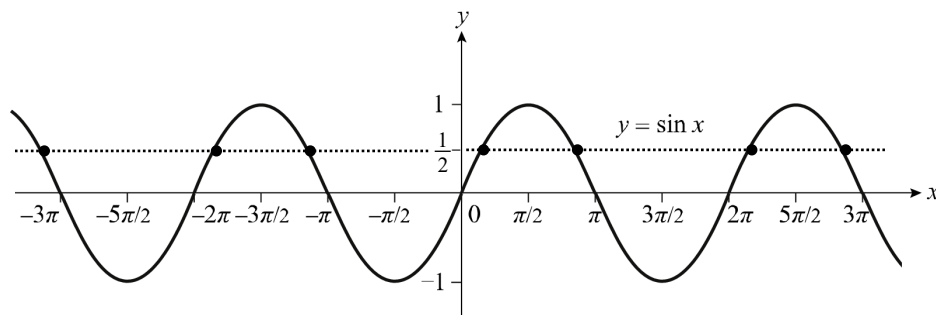
משוואה טריגונומטרית היא משוואה הכוללת פונקציות טריגונומטריות.

הפונקציות הטריגונומטריות ההפוכות מספקות פתרונות למשוואות טריגונומטריות פשוטות.

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

לדוגמה, נתבונן במשוואה

ונתבונן בגרף פונקציית הסינוס:



$$x_1 = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$$

הערך

הוא פתרון של המשוואה, והוא הפתרון היחיד בקטע $[-\pi/2, \pi/2]$, כי פונקציית הסינוס חח"ע בקטע זה.

מהזהות

$$\sin x = \sin(\pi - x)$$

$$x_2 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} = 150^\circ$$

נובע קיומו של פתרון נוסף:

◁ פונקציית הסינוס ההפוכה הוגדרה כפונקציה ההפוכה לפונקציית הסינוס בקטע $[-\pi/2, \pi/2]$.

פתרון זה הוא הפתרון היחיד בקטע $[\pi/2, 3\pi/2]$, כי פונקציית הסינוס חח"ע בקטע זה (כפונקציה יורדת). קיבלנו שלמשוואה יש בדיוק שני פתרונות בקטע $[-\pi/2, 3\pi/2]$:

$$x_1 = \frac{\pi}{6}, \quad x_2 = \frac{5\pi}{6}$$

פונקציית הסינוס היא מחזורית, ומחזורתה הוא 2π . לכן לכל k שלם:

$$\sin(x_1 + 2\pi k) = \sin x_1 = \frac{1}{2}$$

$$\sin(x_2 + 2\pi k) = \sin x_2 = \frac{1}{2}$$

במילים אחרות, הוספת כפולה של 2π לפתרון של המשוואה יוצרת פתרון חדש. קיבלנו אפוא אינסוף פתרונות למשוואה:

$$\{x \mid x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \text{ או } x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}\}$$

הקטע $[-\pi/2, 3\pi/2]$ הוא בעל אורך של 2π , וגרף פונקציית הסינוס מתקבל מהדבקה חוזרת ונשנית של גרף הפונקציה בקטע זה. לכן אלה הם כל הפתרונות של המשוואה.

משיקולים דומים, ניתן לראות כי:

א. בהינתן המשוואה $\sin x = a$

(עבור $-1 \leq a \leq 1$ כלשהו), פתרונות המשוואה הם:

$$\{x \mid x = \arcsin a + 2\pi k \text{ או } x = \pi - \arcsin a + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}\}$$

ב. בהינתן המשוואה $\cos x = a$

(עבור $-1 \leq a \leq 1$ כלשהו), פתרונות המשוואה הם:

$$\{x \mid x = \arccos a + 2\pi k \text{ או } x = -\arccos a + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}\}$$

ג. בהינתן המשוואה $\tan x = a$

(עבור a ממשי כלשהו), פתרונות המשוואה הם:

$$\{x \mid x = \arctan a + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}\}$$

ד. בהינתן המשוואה $\cot x = a$

(עבור a ממשי כלשהו), פתרונות המשוואה הם:

$$\{x \mid x = \operatorname{arccot} a + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}\}$$

ארבע המשוואות לעיל נקראות **המשוואות הטריגונומטריות הבסיסיות**; פתרון מהסוג שתואר לעיל נקרא **הפתרון הכללי** של המשוואה.

הערות:

א. כדאי לשים לב שקיום הפתרון $x = -\arccos a$ למשוואה $\cos x = a$ נובע מזוגיות פונקציית הקוסינוס:

$$\cos(-\arccos a) = \cos(\arccos a) = a$$

ב. כדאי לשים לב שפתרונות המשוואות $\tan x = a$ ו- $\cot x = a$ הם פשוטים יחסית ובעלי מחזוריות של π . דבר זה נובע מהיות הפונקציות $\tan, \cot$ בעלות מחזור של π , ומהיותן חח"ע בתחום שאורכו הוא π .

ג. במקרים $a = 0$, $a = 1$ ו- $a = -1$ נוכל לפשט את פתרונות המשוואות $\sin x = a$, $\cos x = a$, ולהימנע מפיצול לשני סוגי פתרונות:

פתרון המשוואה $\cos x = a$	פתרון המשוואה $\sin x = a$	ערך a
$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$	$x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$	$a = 0$
$x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$	$a = 1$
$x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$	$a = -1$

תוכלו להיווכח בכך על ידי התבוננות בגרפים של פונקציות הסינוס והקוסינוס.

שאלה 26

פתרו את המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & \sin x = -\sqrt{2}/2 \\ \text{ב.} & \tan x = 5 \\ \text{ג.} & \cos x = \cos 1000^\circ \\ & \text{ד.} & \cot x = \cot 500^\circ \end{array}$$

התשובה בעמוד 175

כעת נעבור לפתרון של משוואות טריגונומטריות מורכבות יותר. הדרך הנפוצה לפתרון היא שימוש בזהויות טריגונומטריות וביצוע צעדי שקילות עד להגעה לאחת המשוואות הטריגונומטריות הבסיסיות. נתבונן בכמה דוגמאות:

$$\begin{aligned} \text{א. נתבונן במשוואה:} & \sin x \cos x = 0.3 \\ \Leftrightarrow 2 \sin x \cos x &= 0.6 & \text{נכפול ב-2:} \\ \Leftrightarrow \sin 2x &= 0.6 & \text{לפי זהויות הזווית הכפולה:} \\ \Leftrightarrow 2x = \arcsin 0.6 + 2\pi k & \text{ או } 2x = \pi - \arcsin 0.6 + 2\pi k & \text{לפיכך:} \\ & & \text{(עבור } k \text{ שלם). נחלק ב-2:} \\ \Leftrightarrow x = \frac{\arcsin 0.6}{2} + \pi k & \text{ או } x = \frac{\pi}{2} - \frac{\arcsin 0.6}{2} + \pi k \\ x_1 = \frac{\arcsin 0.6}{2} \approx 0.322, & x = \frac{\pi}{2} - \frac{\arcsin 0.6}{2} \approx 1.249 & \text{נסמן:} \\ \{x_1 + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{x_2 + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\} & & \text{קבוצת הפתרונות היא אפוא} \end{aligned}$$

ב. נתבונן במשוואה $\cos^2 x + \sin x = 0$

$$\Leftrightarrow 1 - \sin^2 x + \sin x = 0 \quad \text{מהזהות } \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \text{ נקבל:}$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x - \sin x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow t^2 - t - 1 = 0 \quad \text{נגדיר: } t = \sin x \text{ . מתקבלת המשוואה הריבועית:}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad \text{נפתור לפי נוסחת השורשים:}$$

$$t_1 = (1 + \sqrt{5})/2 \approx 1.618, \quad t_2 = (1 - \sqrt{5})/2 \approx -0.618 \quad \text{הפתרונות הם}$$

היות ש־ $-1 \leq \sin x \leq 1$, הפתרון $t = t_1$ אינו אפשרי. לכן:

$$\Leftrightarrow t = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{נחזור למשתנה המקורי:}$$

$$x_1 = \arcsin \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \approx 0.666, \quad x_2 = \pi - x_1 \approx 3.808 \quad \text{נגדיר:}$$

$$\{x_1 + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{x_2 + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\} \quad \text{קבוצת הפתרונות היא}$$

ג. נתבונן במשוואה $\sin x + 5\cos x = 3$

נדגים שיטת פתרון המתאימה לכל משוואה מהצורה $\sin x + a\cos x = b$:

$$\Leftrightarrow \sin x + \cos x \tan \alpha = 3 \quad \text{נסמן: } \alpha = \arctan 5 \text{ . מתקבלת המשוואה}$$

$$\Leftrightarrow \sin x + \cos x \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 3$$

$$\Leftrightarrow \sin x \cos \alpha + \cos x \sin \alpha = 3 \cos \alpha \quad \text{נכפול ב־ } \cos \alpha$$

$$\Leftrightarrow \sin(x + \alpha) = 3 \cos \alpha$$

$$\Leftrightarrow x + \alpha = \arcsin(3 \cos \alpha) + 2\pi k \text{ או } x + \alpha = \pi - \arcsin(3 \cos \alpha) + 2\pi k \quad \text{(עבור } k \in \mathbb{Z} \text{)}$$

$$\Leftrightarrow x = \arcsin(3 \cos \alpha) - \alpha + 2\pi k \text{ או } x = \pi - \arcsin(3 \cos \alpha) - \alpha + 2\pi k$$

$$x_1 = \arcsin(3 \cos \alpha) - \alpha \approx -0.744 \quad \text{נגדיר:}$$

$$x_2 = \pi - \arcsin(3 \cos \alpha) - \alpha \approx 1.139$$

$$\{x_1 + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{x_2 + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\} \quad \text{קבוצת הפתרונות היא}$$

שאלה 27

פתרו את המשוואות הבאות:

א. $\tan 8x = 3$

ב. $\sin x \cos(x + 20^\circ) = 0.2$

ג. $\tan(x + 30^\circ) = \tan x + 2$

ד. $\tan x + 2 \cot x = 3$

ה. $\cos^2 x = 1$

ו. $2 \sin x + 3 \cos x = 1$

ז. $\sin x \tan(x + 30^\circ) = 0$

ח. $\sin x + \sin(x + 20^\circ) = 1$

התשובה בעמוד 176

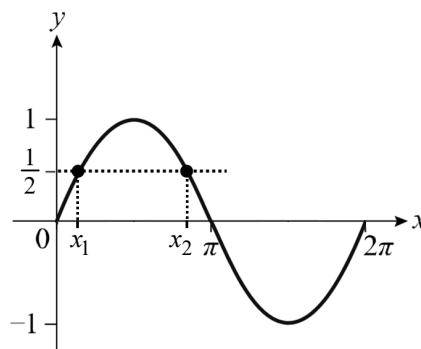
אי־שוויונות טריגונומטריים

בפתרון של אי־שוויונות הכוללים פונקציות טריגונומטריות נסתמך על תחומי העלייה והירידה של הפונקציות הטריגונומטריות היסודיות, כפי שהם משתקפים בגרפים של פונקציות אלה, ועל מחזוריות הפונקציות.

נדגים זאת בפתרון האי־שוויון הבא:

$$\sin x > \frac{1}{2}$$

נתחיל במציאת פתרונות האי־שוויון בקטע $[0, 2\pi]$. גרף הפונקציה בקטע זה נראה כך:



כפי שמצאנו בעבר, מתקיים $\sin x = 1/2$ עבור שני מספרים בקטע הנתון:

$$x_1 = \frac{\pi}{6} = 30^\circ, \quad x_2 = \frac{5\pi}{6} = 150^\circ$$

מכאן נסיק שהאי־שוויון מתקיים, בקטע הנתון, בדיוק כאשר $x_1 < x < x_2$.

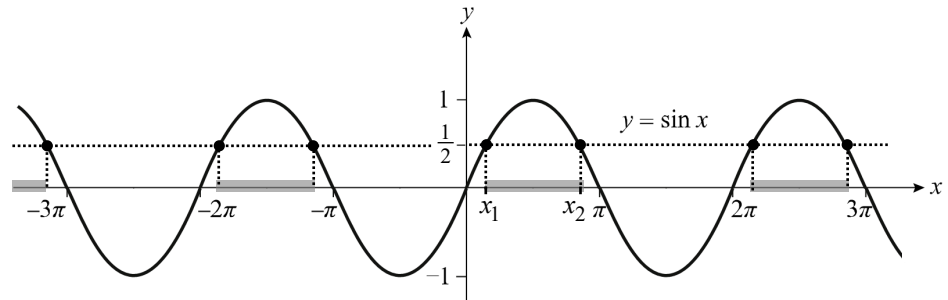
כעת נתבונן בפונקציית הסינוס בכל הישר. גרף פונקציית הסינוס מתקבל כהדבקה חוזרת ונשנית של גרף הפונקציה בקטע $[0, 2\pi]$.

לכן לכל k שלם, אם $x_1 + 2\pi k < x < x_2 + 2\pi k$ אז $\sin x > 1/2$, ובדרך זו מתקבלים כל פתרונות האי־שוויון.

נוכל לכתוב את קבוצת הפתרונות כך:

$$\{x \mid x_1 + 2\pi k < x < x_2 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}\}$$

באיור הבא מסומנת קבוצת הפתרונות על ציר ה- x :



שאלה 28

פתרו את האי־שוויונות הבאים:

א. $\cos x > 0.3$

ב. $\tan x \geq 1$

ג. $\sin x \cos x < 0$

התשובה בעמוד 179

סיכום שיעור 9

בשיעור זה הכרנו את הטריגונומטריה – כלי רב־כוח המאפשר לרתום את עוצמתן של הפונקציות לחישובים גיאומטריים. התחלנו מהגדרת הפונקציות הטריגונומטריות עבור זוויות חדות, באמצעות משולש ישר־זווית. הרחבנו את תחום ההגדרה בעזרת המעגל, תחילה לקטע $[0, 2\pi]$ ולאחר מכן לישר כולו.

ראינו יישומים גיאומטריים שונים של הפונקציות הטריגונומטריות, ובמיוחד הכרנו את משפט הסינוסים ומשפט הקוסינוסים. בעזרתם ניתן לשחזר נתונים על משולשים, בהינתן נתונים חלקיים.

לאחר מכן עברנו לעיסוק בפונקציות הטריגונומטריות כאובייקטים מתמטיים בעלי עניין עצמאי. ראינו שפונקציות אלה מקיימות מגוון עשיר של זהויות, ותרגלנו הוכחה של זהויות חדשות, בדומה להוכחות הזהויות האלגבריות שהכרנו בעבר.

לבסוף, למדנו כיצד לפתור משוואות טריגונומטריות בעזרת הזהויות השונות, והפונקציות הטריגונומטריות ההפוכות.

בשאלות להערכה עצמית נפגוש יישומים גיאומטריים נוספים של הטריגונומטריה.

שאלות להערכה עצמית

שאלה 29

הוכיחו את הזהויות הבאות:

א. $\frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}$

ב. $\cos \alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha = \frac{\sin 8\alpha}{8 \sin \alpha}$

ג. $\cot 2\alpha = \frac{\cot \alpha - \tan \alpha}{2}$

ד. $\frac{\sin^3 \alpha - \cos^3 \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \sin \alpha \cos \alpha + 1$

ה. $\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot \alpha$

התשובה בעמוד 180

שאלה 30

א. תהי $13\pi/2 < \alpha < 7\pi$ זווית המקיימת $\cos \alpha = -2/7$. חשבו את $\sin \alpha$.

ב. תהי $3\pi/2 < \alpha < 2\pi$ זווית המקיימת $\tan \alpha = -5$. חשבו את $\sin \alpha$.

התשובה בעמוד 182

שאלה 31

בכל אחד מהסעיפים, התיירו את המשולש (כלומר מצאו את גודלי כל צלעותיו וזוויותיו) על פי הנתונים הבאים:

א. $a = 7, b = 5, c = 4$

ב. $a = 3, b = 4, \gamma = 50^\circ$

ג. $a = 3, b = 5, \alpha = 30^\circ$ (שימו לב: במקרה זה יש שני פתרונות שונים).

התשובה בעמוד 182

שאלה 32

המרובע $ABCD$ חסום במעגל. נתון: $\overline{DA} = 5, \overline{CD} = 4, \overline{BC} = 3, \overline{AB} = 2$. חשבו את $\overline{BD}$.

התשובה בעמוד 184

שאלה 33

במשולש, תהיינה α ו- β הזוויות שמול הצלעות a ו- b , בהתאמה.

א. הוכיחו שאם $\alpha > \beta$ אז $a > b$.

ב. הסיקו ש- $a > b$ אם ורק אם $\alpha > \beta$.

הדרכה: היעזרו במשפט הסינוסים.

התשובה בעמוד 184

שאלה 34

הוכיחו את הנוסחאות הבאות לשטח משולש שצלעותיו הם a, b, c , הזוויות שמולן

(בהתאמה) הן α, β, γ , ורדיוס המעגל החוסם אותו הוא R :

א. $S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$ ב. $S = 2R^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$

התשובה בעמוד 185

שאלה 35

פתרו את המשוואות הבאות:

א. $2 \tan x + \frac{3}{\cos^2 x} = 5$

ב. $\tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = 2 \cos x$

ג. $\sin(2x - 50^\circ) \cos(3x + 60^\circ) = 0$

ד. $\sin x \sin 3x = 1/3$

התשובה בעמוד 185

שאלה 36א. תהי $\alpha = 22.5^\circ$. חשבו (ללא עזרת מחשבון) את $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\tan \alpha$.

הדרכה: היעזרו בנוסחאות הקוסינוס של זווית כפולה.

ב. תהי $\alpha = 15^\circ$. חשבו (ללא עזרת מחשבון) את $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\tan \alpha$.

התשובה בעמוד 187

שאלה 37בהינתן מצולע משוכלל בעל n צלעות החסום במעגל שרדיוסו 1, חשבו את היקף המצולע ואת שטחו.

התשובה בעמוד 189

שאלה 38

הוכיחו באינדוקציה את הזהות:

$$\sin \alpha + \sin 2\alpha + \dots + \sin n\alpha = \frac{\cos\left(\frac{1}{2}\alpha\right) - \cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\alpha\right)}{2 \sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right)}$$

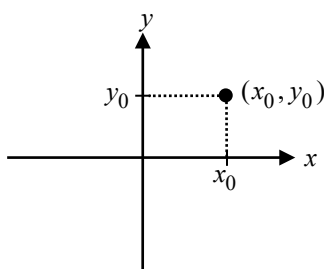
התשובה בעמוד 190

שיעור 10

גיאומטריה אנליטית

בשיעור הקודם ראינו איך הגדרתן של פונקציות מסוימות, הפונקציות הטריגונומטריות, אפשרה לפתור בעיות גיאומטריות רבות. בשיעור הנוכחי נרתום את כוחה של האלגברה לטובת הגיאומטריה. נלמד על המשוואות המגדירות צורות גיאומטריות שונות – ישרים, מעגלים, אליפסות, ועוד – ונלמד כיצד להפיק מהמשוואות מידע על הצורות שהן מייצגות.

קישור זה בין גיאומטריה לאלגברה הוא אפשרי בזכות המישור הקרטזי, פרי המצאתו של המתמטיקאי רנה דקארט. נתקלנו במישור הקרטזי לראשונה בשיעור השישי. הנה תזכורת אודותיו:

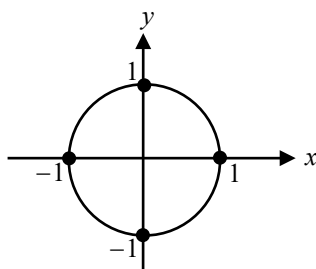


המישור הקרטזי הנו מישור רגיל, שבו הוצבה מערכת צירים המורכבת משני צירים ניצבים, ציר ה- x וציר ה- y . לכל נקודה במישור מותאם זוג מספרים (x_0, y_0) ; המספר x_0 נקבע על פי מיקומו של היטל הנקודה על ציר ה- x , והמספר y_0 על פי מיקומו של היטל הנקודה על ציר ה- y . המספרים x_0 ו- y_0 הם **הקואורדינטות** של הנקודה. זוג המספרים (x_0, y_0) קובע את הנקודה ביחידות, ובשל כך הוא מייצג את הנקודה. לנקודה ניתן לקרוא: הנקודה (x_0, y_0) .

משוואה אלגברית (או משוואה כלשהי) המקשרת בין המשתנים x ו- y מגדירה צורה במישור, המורכבת מכל הנקודות (x, y) שעבורן המשוואה מתקיימת.

בשיעור השישי התמקדנו במשוואות מהצורה $y = f(x)$, באשר f היא פונקציה ממשיית. הצורה המתאימה למשוואה זו היא גרף הפונקציה f . צורה כזו מתאפיינת בכך שלכל ערך x מתאים לכל היותר ערך אחד של y , ולכן כל ישר המקביל לציר ה- y פוגש אותה בנקודה אחת לכל היותר.

אך אין סיבה להצטמצם רק למשוואות מצורה זו. במסגרת הגיאומטריה האנליטית נעסוק גם במשוואות שבהן לערכים מסוימים של x מתאים יותר מערך אחד של y .



לדוגמה, המשוואה $x^2 + y^2 = 1$ מגדירה, כפי שנראה בהמשך השיעור, מעגל שרדיוסו 1 ומרכזו בראשית הצירים. צורה זו אינה גרף של פונקציה, כי למשל ציר ה- y עצמו נחתך עמה בשתי נקודות שונות: $(0,1)$ ו- $(0,-1)$. במילים אחרות, הצבה $x = 0$ במשוואות המעגל מניבה שני ערכים אפשריים של y : $y = 1$ ו- $y = -1$.

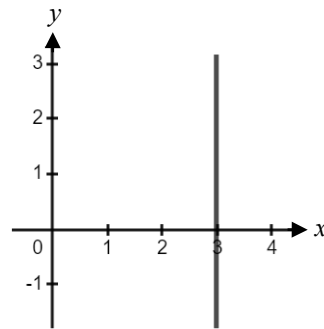
משוואת הישר

נפתח במציאת הצורה הכללית של משוואה של ישר במישור.

בשיעור 6 הגדרנו פונקציה לינארית כפונקציה מהצורה $f(x) = ax + b$ ולמדנו שהגרף של כל פונקציה לינארית הוא קו ישר. לקבוע a קראנו שיפוע הפונקציה הלינארית.

במונחי הגיאומטריה האנליטית, נאמר שהמשוואה $y = ax + b$ היא משוואה של ישר.

האם כל ישר ניתן לייצוג על ידי משוואה מהצורה $y = ax + b$?
התשובה לכך היא שלילית. נתבונן, לדוגמה, בישר מקביל לציר ה- y , הנחתך עם ציר ה- x בנקודה $(3,0)$.



נקודות הישר מתאפיינות בכך שהיטלן על ציר ה- x הנו הנקודה $(3,0)$. ישר זה מאופיין, אם כך, על ידי המשוואה הבאה:

$$x = 3$$

בפרט, הנקודות הבאות נמצאות על ישר זה: $(3,1)$, $(3,2)$

אך ישר מהצורה $y = ax + b$ הוא גרף של פונקציה, המתאימה לכל ערך- x , ערך- y יחיד. בישר כזה לא תיתכנה שתי נקודות שונות בעלי קואורדינטת x זהה.

לכן הישר $x = 3$ אינו מהצורה $y = ax + b$. כללית יותר, כל ישר שמקביל לציר ה- y אינו מצורה זו.

לישר המקביל לציר ה- y נקרא **ישר אנכי**;

לישר המקביל לציר ה- x נקרא **ישר אופקי**;

לישר שאינו אנכי ואינו אופקי נקרא **ישר משופע**.

טענה 10.1

כל ישר שאינו אנכי מיוצג על ידי משוואה מהצורה $y = ax + b$. הקבועים a ו- b בייצוג זה נקבעים ביחידות.

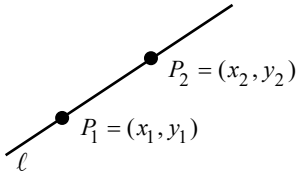
הוכחה

יהי ℓ ישר שאינו אנכי, ותהיינה P_1, P_2 נקודות על הישר.

נייצג אותן על ידי קואורדינטות קרטזיות:

$$P_1 = (x_1, y_1)$$

$$P_2 = (x_2, y_2)$$



אם היה מתקיים $x_1 = x_2$, אז שתי הנקודות P_1, P_2 היו מונחות על הישר $x = x_1$, ומכיוון ששתי נקודות על הישר קובעות אותו ביחידות (אקסיומה 8.2), היה מתקבל שהישר ℓ מתלכד עם הישר האנכי $x = x_1$, בסתירה להנחה. לכן $x_1 \neq x_2$.

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{נגדיר:}$$

$$(1) \quad y = a(x - x_1) + y_1 \quad \text{ונתבונן במשוואה}$$

$$(2) \quad y = ax + (y_1 - ax_1) \quad \text{משוואה זו ניתנת לכתיבה כך:}$$

$$(3) \quad y = ax + b \quad \text{נגדיר } b = y_1 - ax_1, \text{ ונקבל משוואה שקולה:}$$

לכן המשוואה (1) מגדירה קו ישר.

הנקודה $P_1 = (x_1, y_1)$ נמצאת על הישר כי $x = x_1, y = y_1$ מקיימים את המשוואה (1):

$$a(x_1 - x_1) + y_1 = y_1$$

הנקודה $P_2 = (x_2, y_2)$ נמצאת על הישר כי $x = x_2, y = y_2$ מקיימים את המשוואה (1):

$$a(x_2 - x_1) + y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x_2 - x_1) + y_1 = (y_2 - y_1) + y_1 = y_2$$

לישר ℓ ולישר $y = ax + b$ יש, אפוא, שתי נקודות משותפות, ולפי אקסיומה 8.2, הם מתלכדים. כך הוכחנו שהישר ℓ ניתן לביטוי בצורה המבוקשת.

כעת, נוכיח שהקבועים a ו- b נקבעים ביחידות: בהינתן ישר שמשוואתו היא (3), נתבונן בשתי נקודות שונות $P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2)$ על ישר זה. מתקיים אפוא

$$y_1 = ax_1 + b$$

$$y_2 = ax_2 + b$$

$$y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1) \quad \text{מחיסור השוויונות נקבל:}$$

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{ולכן}$$

ומכאן ש- a נקבע ביחידות.

מהשוויון $y_1 = ax_1 + b$ מתקבל $b = y_1 - ax_1$, ולכן גם b נקבע ביחידות. $\square$

הוכחנו שכל ישר שאינו אנכי ניתן לייצוג, באופן אחד ויחיד, על ידי המשוואה

$$y = ax + b$$

לקבוע a נקרא מעתה **שיפוע הישר**.

במהלך הוכחת הטענה האחרונה, הוכחנו את הנוסחה הבאה לשיפוע הישר, בהינתן שתי נקודות שעליו, $P_1 = (x_1, y_1)$ ו- $P_2 = (x_2, y_2)$:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

כמו בשיעור 6, סימנו $\Delta y = y_2 - y_1$ (השינוי ב- y), ו- $\Delta x = x_2 - x_1$ (השינוי ב- x).

נוסחה שימושית נוספת היא משוואת ישר (שאינו אנכי) בהינתן שיפוע הישר, a , ונקודה על הישר, (x_0, y_0) :

$$y = a(x - x_0) + y_0$$

בנוסחה זו נתקלנו (עבור פונקציות לינאריות) בשיעור 6. קל לוודא את נכונותה: מההצגה השקולה $y = ax + (y_0 - ax_0)$ נובע שזו אכן משוואת ישר ששיפועו הוא a , ובהצבה $x = x_0, y = y_0$ נגלה שאכן המשוואה מתקיימת, ולכן הנקודה (x_0, y_0) נמצאת על ישר זה.

בניתוח שערכנו עד כה, חילקנו את הישרים לשני סוגים: ישרים אנכיים, וישרים שאינם אנכיים. ישר אנכי הוא ישר שבו קואורדינטת x היא קבועה, ולכן ישר כזה ניתן לייצוג על ידי המשוואה:

$$x = x_0$$

x_0 הוא מספר ממשי קבוע המייצג את מקום החיתוך של הישר עם ציר ה- x .

מנגד, ישר שאינו אנכי מיוצג על ידי המשוואה $y = ax + b$.

כעת נציג צורה כללית של משוואת ישר, התקפה לכל סוגי הישרים.

טענה 10.2

א. כל ישר במישור ניתן לייצוג על ידי משוואה מהצורה $Ax + By = C$ (הם מספרים קבועים ממשיים).

ב. אם לפחות אחד מהמספרים A, B שונה מאפס, המשוואה $Ax + By = C$ מייצגת ישר.

הוכחה

א. בהינתן ישר במישור, ייתכנו שני מקרים:

(i) הישר אנכי. במקרה זה משוואת הישר היא:

$$x = x_0$$

נציג משוואה זו כך:

$$1 \cdot x + 0 \cdot y = x_0$$

הישר מיוצג על ידי המשוואה המבוקשת, עם $A = 1, B = 0, C = x_0$.

(ii) הישר אינו אנכי. במקרה זה, לפי טענה 10.1, הישר ניתן לייצוג על ידי משוואה מהצורה

$$y = ax + b$$

נציג משוואה זו כך:

$$(-a) \cdot x + 1 \cdot y = b$$

הישר מיוצג על ידי המשוואה המבוקשת, עם $A = -a, B = 1, C = b$.

ב. בהינתן המשוואה $Ax + By = C$, אם $B \neq 0$, נוכל להציג את המשוואה בצורה

$$\frac{A}{B}x + y = \frac{C}{B} \quad \text{השקולה:}$$

$$y = \left(-\frac{A}{B}\right)x + \frac{C}{B} \quad \text{כלומר:}$$

וזו משוואה של ישר שאינו אנכי.

אם $B = 0$ אז לפי ההנחה, $A \neq 0$. מתקבלת המשוואה $Ax = C$

השקולה לכך ש- $x = C/A$. במקרה זה המשוואה מייצגת ישר אנכי. $\square$

הצגתו של ישר על ידי המשוואה $Ax + By = C$ אינה יחידה, שכן ניתן לכתוב משוואה זו בקבוע שונה מאפס, ולקבל משוואה שקולה מאותה הצורה.

לדוגמה, המשוואות הבאות:

$$3x + 2y = 4$$

$$6x + 4y = 8$$

מייצגות את אותו הישר, כי הן שקולות: המשוואה השנייה מתקבלת מהראשונה על ידי הכפלה ב-2.

שאלה 1

א. מצאו את משוואת הישר העובר דרך כל אחד מזוגות הנקודות, והציגו אותו בצורה הכללית $Ax + By = C$.

(i) $(1,1)$ ו- $(2,4)$

(ii) $(5,-2)$ ו- $(7,3)$

(iii) $(1,4)$ ו- $(1,-2)$

(iv) $(10,6)$ ו- $(2,6)$

ב. מצאו את שיפועי הישרים הבאים:

(i) $2x + 3y = 5$

(ii) $y = 3$

ג. נתון משולש שקודקדיו הם $A = (0,3)$, $B = (5,2)$, $C = (2,8)$. מצאו את השיפועים של צלעות המשולש.

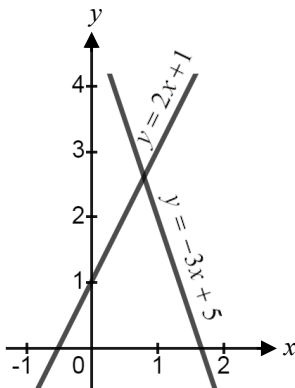
התשובה בעמוד 191

חיתוך בין שני ישרים

הגיאומטריה האנליטית מבוססת על הרעיון שמשוואה במשתנים x ו- y מגדירה צורה במישור, המורכבת מאוסף הנקודות (x,y) שעבורן משוואה זו מתקיימת.

בהינתן שתי צורות במישור, המיוצגות על ידי משוואות, כדי למצוא את החיתוך בין שתי הצורות (= קבוצת הנקודות המשותפות לשתי הצורות), עלינו לפתור את מערכת המשוואות המתקבלת משתי משוואות הצורות ביחד.

כאשר מדובר בשני ישרים נחתכים, כדי למצוא את נקודת החיתוך שלהם עלינו לפתור מערכת משוואות לינאריות בשני נעלמים.



נתבונן, לדוגמה, בשני הישרים הבאים:

$$y = 2x + 1$$

$$y = -3x + 5$$

כדי למצוא את נקודת החיתוך ביניהם עלינו לפתור את מערכת המשוואות

$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = -3x + 5 \end{cases}$$

משתי המשוואות מתקבל מיידית:

$$2x + 1 = -3x + 5 \Rightarrow 5x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{5} = 0.8$$

$$y = 2 \cdot \frac{4}{5} + 1 = \frac{13}{5} = 2.6$$

נציב ערך זה במשוואה הראשונה:

נקודת החיתוך של שני הישרים היא $(0.8, 2.6)$.

שאלה 2

א. מצאו את נקודת החיתוך של הישרים $x + 3y = 1$ ו- $2x - y = 4$.

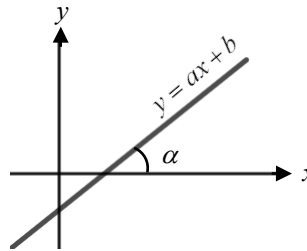
ב. מצאו את נקודת החיתוך של הישרים $x = 5$ ו- $2x + y = 4$.

ג. צלעותיו של משולש מונחות על הישרים הבאים: $x + y = 1$, $x - y = 1$, $2x = 3y$. מצאו את קודקודי המשולש.

התשובה בעמוד 192

הקשר שבין שיפוע לזווית

נתבונן בישר שאינו אנכי, ששיפועו הוא a .



נסמן ב- α את הזווית בין הישר לציר ה- x . זווית זו נמדדת מקרן בכיוון החיובי של ציר ה- x , נגד כיוון השעון ועד למפגש עם קרן של הישר. אם הישר הוא אופקי (ולכן מקביל לציר ה- x או מתלכד איתו), נסמן $\alpha = 0^\circ$. בכל מקרה מתקיים: $0^\circ \leq \alpha < 180^\circ$.

השיפוע a קובע את מידת תלילותו של הישר, כלומר את היחס בין הגדלת קואורדינטת y להגדלת קואורדינטת x , במעבר מנקודה לנקודה.

גם הזווית α קובעת את מידת תלילותו של הישר. אם α היא זווית חדה, אז ככל ש- α קרובה יותר ל- 90° כך הישר תלול יותר.

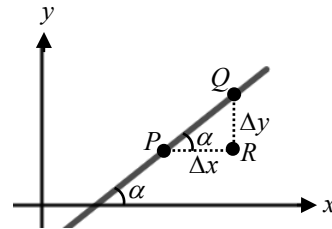
טבעי לשער שקיים קשר בין הקבועים a ו- α . קשר כזה אכן קיים, ונתון במשפט הבא:

משפט 10.3

יהי ℓ ישר לא אנכי, ששיפועו הוא a . תהי α הזווית בין הישר ℓ לבין ציר ה- x . מתקיים:

$$a = \tan \alpha$$

לפני שנציג את הוכחת המשפט הכללית, נתבונן באיור הבא, המראה את נכונותו במקרה ש- α היא זווית חדה:



בחרנו נקודות $P = (x_1, y_1)$ ו- $Q = (x_2, y_2)$ על הישר ℓ , כך ש- $x_1 < x_2$. סימנו $\Delta y = y_2 - y_1$, $\Delta x = x_2 - x_1$, $R = (x_2, y_1)$. שיפועו של הישר נתון על ידי הנוסחה:

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (\text{ראו בעמוד 46})$$

המשולש $\triangle PQR$ הוא ישר-זווית, ומתקיים $\angle P = \alpha$, על פי שוויון זוויות מתאימות בין

$$\tan \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = a$$

הישרים המקבילים PR וציר ה- x . לפיכך:

עתה נעבור להוכחה הכללית.

הוכחת משפט 10.3

נבטא את משוואתו של הישר ℓ כך:

נתבונן בישר ℓ' המוגדר על ידי המשוואה:

$$y = ax + b$$

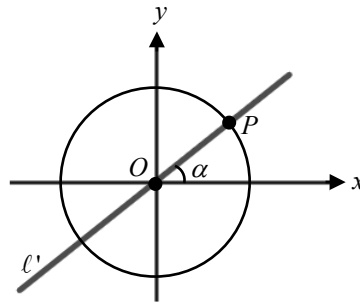
$$y = ax$$

אם $b = 0$, אז הישרים ℓ, ℓ' מתלכדים. אחרת, לישרים אין אף נקודה משותפת, שכן השוויונות $y = ax$ ו- $y = ax + b$ לא יכולים להתקיים בו-זמנית. לכן הישרים מקבילים.

בין אם הישרים ℓ, ℓ' מתלכדים, ובין אם הם מקבילים, נקבל שהזווית בין ℓ' לציר ה- x שווה לזווית בין ℓ לציר ה- x , כלומר ל- α .

הנקודה $O = (0, 0)$ (ראשית הצירים) נמצאת על הישר ℓ' , שכן $0 = a \cdot 0$.

כעת נתבונן במעגל היחידה, שבעזרתו הוגדרו הפונקציות הטריגונומטריות. מרכז המעגל הוא בראשית הצירים, ורדיוס המעגל הוא 1.



תהי P נקודת חיתוך של הישר ℓ' עם המעגל, הנבחרת כך ש- OP יוצר זווית α עם הכיוון החיובי של ציר ה- x . נסמן את שיעורי הנקודה $P = (x_0, y_0)$: הנקודה P נמצאת על הישר ℓ' , ולכן

הישר ℓ אינו אנכי, ולכן גם הישר ℓ' (המקביל לו) אינו אנכי. לכן, $x_0 \neq 0$.

לפיכך:

$$a = \frac{y_0}{x_0}$$

מהגדרת הפונקציות הטריגונומטריות במעגל נובע:

$$\square \quad a = \frac{y_0}{x_0} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha \quad \text{מכאן}$$

שאלה 3

א. חשבו את הזווית בין הישר $2x + 4y = 3$ לבין ציר ה- x .

ב. מצאו את משוואת הישר העובר דרך הנקודה $(-2, 1)$ ויוצר זווית של 60° עם ציר ה- x .

התשובה בעמוד 193

זווית בין שני ישרים

בהינתן שני ישרים, המיוצגים על ידי משוואות, נרצה לחשב את הזווית ביניהם. כפי שנראה מיד, הזווית נקבעת על ידי שיפועי הישרים.

נפתח בטענה הבאה:

טענה 10.4

א. שני ישרים שונים (שאינם אנכיים) הם מקבילים אם ורק אם יש להם שיפוע זהה.

ב. ישר הוא אופקי אם ורק אם שיפועו הוא 0.

ניתן להוכיח טענה זו על סמך משפט 10.3, שכן ישרים מקבילים יוצרים זוויות שוות עם ציר ה- x (כזוויות מתאימות בין ישרים מקבילים), ושיפוע הישר נקבע על פי הזווית שלו עם ציר ה- x . נציג הוכחה בדרך אחרת, אלגברית:

הוכחה

א. בהינתן הישרים ℓ, ℓ' , נייצג אותם על ידי משוואות: הישר ℓ נתון על ידי המשוואה $y = ax + b$, והישר ℓ' נתון על ידי המשוואה $y = a'x + b'$. אם לישרים יש שיפוע זהה, אז $a = a'$. לכן $b \neq b'$, כי הנחנו שהישרים שונים זה מזה. נתבונן בשני השוויונות:

$$(1) \quad \begin{cases} y = ax + b \\ y = a'x + b' \end{cases}$$

אם שני השוויונות מתקיימים בו זמנית, אז מהשוויון $a = a'$ נובע ש- $b = b'$, וקיבלנו סתירה. לכן אין שום זוג (x, y) שעבורו מתקיימים שני השוויונות, ולכן לשני הישרים אין נקודות משותפות. לפיכך, הישרים מקבילים.

בכיוון ההפוך, אם הישרים מקבילים, אז לא ייתכן ש- $a \neq a'$, שכן אם $a \neq a'$, נוכל לחסר בין שתי המשוואות במערכת (1) ולקבל:

$$(a - a')x + b - b' = 0 \Rightarrow x = \frac{b' - b}{a - a'} \Rightarrow y = ax + b = a \frac{b' - b}{a - a'} + b$$

ניתן לוודא שערכים אלה הם אכן פתרונות למערכת המשוואות (1), ולכן יש נקודה משותפת לשני הישרים, בסתירה להנחה. לכן $a = a'$.

ב. ציר ה- x הוא ישר המיוצג על ידי המשוואה $y = 0 \cdot x$, ולכן שיפועו הוא 0. לפי ההגדרה, ישר אופקי הוא ישר המקביל לציר ה- x . לפי סעיף א, ישר הוא אופקי אם ורק אם שיפועו הוא 0. $\square$

שאלה 4

א. האם הישרים $x + 3y = 6$ ו- $2x - y = 3$ מקבילים?

ב. האם הישר $y = 5x + 1$ מקביל לישר העובר דרך הנקודות $(2, 0)$ ו- $(3, 5)$?

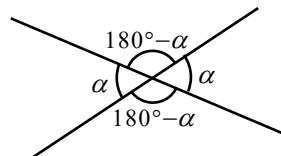
ג. נתון משולש $\triangle ABC$ בעל הקודקודים הבאים:

$$A = (0, 2), B = (5, 0), C = (1, 3)$$

דרך הקודקוד A העבירו ישר מקביל לצלע BC . מצאו את משוואתו של ישר זה.

התשובה בעמוד 193

כעת נעבור למציאת הזווית שבין שני ישרים נחתכים. כזכור, במפגש בין שני ישרים נוצרות ארבע זוויות. מהתכונות של זוויות קודקודיות ומשלימות נובע שניתן לסמן זוויות אלה כך:



נתמקד במציאת הזווית הקטנה שבין זוויות אלה. זווית זו נמצאת בתחום $(0, 90^\circ]$.

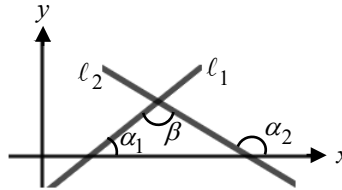
משפט 10.5

יהיו ℓ_1, ℓ_2 ישרים לא אנכיים, בעלי שיפועים m_1, m_2 (בהתאמה).
 א. הישרים ℓ_1, ℓ_2 ניצבים אם ורק אם מתקיים: $m_1 m_2 = -1$.
 ב. אם הישרים ℓ_1, ℓ_2 אינם ניצבים אז הזווית החדה α שבין הישרים ℓ_1 ו- ℓ_2 מקיימת:

$$\tan \alpha = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$$

הוכחה

בהינתן ישרים ℓ_1, ℓ_2 היוצרים זוויות של α_1, α_2 עם ציר ה- x , נתבונן באיור הבא:



במצב המוצג באיור, מתקיים

$$\alpha_1 + (180^\circ - \alpha_2) + \beta = 180^\circ$$

ולכן

$$\beta = \alpha_2 - \alpha_1$$

ייתכן גם המצב ההפוך, שבו $\beta = \alpha_1 - \alpha_2$.

הזווית α (הקטנה מבין הזוויות שבין ℓ_1 ו- ℓ_2) שווה ל- β או ל- $180^\circ - \beta$.

לכן מתקיימת אחת מהאפשרויות הבאות:

$$(1) \quad \alpha = |\alpha_1 - \alpha_2| \text{ או } \alpha = 180^\circ - |\alpha_1 - \alpha_2|$$

כעת נוכיח את חלק א:

◁ לפי נוסחאות הסינוס והקוסינוס של סכום זוויות (ודאז!)

$$\tan(90^\circ + x) = \frac{\sin(90^\circ + x)}{\cos(90^\circ + x)} = \frac{\cos x}{-\sin x} = \frac{-1}{\tan x} \quad \text{ניעזר בפיתוח הבא -}$$

נניח ש- $\ell_1 \perp \ell_2$. במקרה זה $\alpha = 90^\circ$ ולכן $|\alpha_1 - \alpha_2| = 90^\circ$.

אם $\alpha_1 > \alpha_2$ אז $\alpha_1 = \alpha_2 + 90^\circ$ ולכן:

$$m_1 = \tan \alpha_1 = \tan(90^\circ + \alpha_2) = \frac{-1}{\tan \alpha_2} = \frac{-1}{m_2}$$

לכן, $m_1 m_2 = -1$. במקרה ש- $\alpha_2 > \alpha_1$ נקבל (בהחלפת תפקידי ℓ_1, ℓ_2) $m_2 m_1 = -1$ והמסקנה זהה.

בכיוון ההפוך, אם $m_1 m_2 = -1$ אז

$$\tan \alpha_1 = m_1 = \frac{-1}{m_2} = \frac{-1}{\tan \alpha_2} = \tan(\alpha_2 + 90^\circ)$$

ממחזוריות פונקציית הטנגנס, והיותה חח"ע בקטע $(-90^\circ, 90^\circ)$, נקבל

$$\alpha_1 = \alpha_2 + 90^\circ + 180^\circ k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

יחד עם (1) נסיק ש- $\alpha = 90^\circ$, כלומר $\ell_1 \perp \ell_2$.

נעבור להוכחת חלק ב.

$$\tan(180^\circ - x) = \tan(-x) = -\tan x$$

מהזוויות

$$\tan \alpha = \pm \tan(\alpha_1 - \alpha_2)$$

ומהשוויונות (1) נובע שמתקיים:

מהנוסחה לטנגנס של הפרש זוויות נובע:

$$\tan \alpha = \pm \frac{\tan \alpha_1 - \tan \alpha_2}{1 + \tan \alpha_1 \tan \alpha_2} = \pm \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

מהנחותינו לגבי α נובע ש- $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ולכן $\tan \alpha > 0$. מכאן:

$$\square \quad \tan \alpha = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$$

נדגים את השימוש במשפט האחרון:

א. נמצא את משוואת האנך לישר $x + 2y = 1$ העובר דרך הנקודה $(5, 1)$:

נסמן ב- ℓ את הישר $x + 2y = 1$. משוואת הישר ℓ שקולה למשוואה

$$y = \frac{1-x}{2} = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

ולכן שיפוע הישר ℓ הוא $-1/2$. נסמן את שיפוע הישר המאונך ל- ℓ ב- m . לפי המשפט,

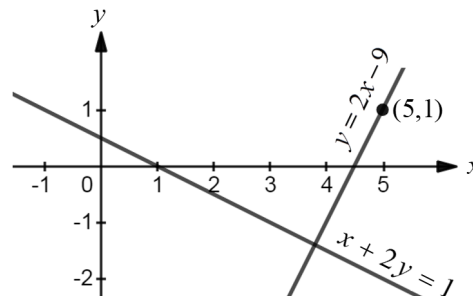
$$m \cdot \frac{-1}{2} = -1 \Rightarrow m = 2$$

נמצא את משוואת הישר המבוקש על פי הנקודה $(5, 1)$ שעליו, והשיפוע 2:

$$y = 2(x - 5) + 1$$

$$y = 2x - 9$$

כלומר:



ב. נמצא את הזווית בין הישרים $3x + 2y = 1$ ו- $3x = 4y$:

הישר הראשון ניתן להצגה בצורה $y = -1.5x + 0.5$ ולכן שיפועו הוא $m_1 = -1.5$.

הישר השני ניתן להצגה בצורה $y = (3/4)x$ ולכן שיפועו הוא $m_2 = 3/4$.

הזווית α שבין הישרים מקיימת:

$$\tan \alpha = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right| = \left| \left(-\frac{3}{2} - \frac{3}{4} \right) : \left(1 - \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 2} \right) \right| = \left| \left(-\frac{9}{4} \right) : \left(-\frac{1}{8} \right) \right| = 18$$

זווית זו אינה ישרה ($m_1 m_2 \neq -1$) ולכן היא חדה. לפיכך:

$$\alpha = \arctan 18 \approx 86.82^\circ$$

שאלה 5

- א. מצאו את משוואת האנך לישר $x + 2y = 1$, העובר דרך הנקודה $(-1, -3)$.
- ב. מצאו את היטל הנקודה $(-1, -3)$ על הישר $x + 2y = 1$.
- ג. נתון משולש שקודקדיו הם $(0, 0)$, $(3, 4)$, $(1, 3)$. מצאו את נקודת מפגש הגבהים של המשולש.

התשובה בעמוד 194

שאלה 6

- א. חשבו את הזווית שבין הישר $y = 5 - 2x$ לישר $2x - 3y = 4$.
- ב. נתון משולש שקודקדיו הם $(0, 0)$, $(3, 4)$, $(1, 3)$. חשבו את זוויות המשולש.

התשובה בעמוד 195

הצגה פרמטרית של ישר

בהינתן שתי נקודות שונות זו מזו:

$$A = (x_1, y_1)$$

$$B = (x_2, y_2)$$

נתבונן בישר העובר דרך נקודות אלה, ונסמן אותו ב- ℓ .

אם ברצוננו למצוא את משוואת הישר ℓ , עלינו לחשב (בהנחה ש- $x_1 \neq x_2$) את השיפוע

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

ולכתוב את משוואת הישר בעל שיפוע זה, העובר דרך הנקודה A :

$$y = a(x - x_1) + y_1$$

עתה נציג דרך נוספת לכתיבת נקודות הישר.

בהינתן מספר ממשי t , נתבונן בנקודה הבאה, המסומנת P_t :

$$P_t = ((1-t)x_1 + tx_2, (1-t)y_1 + ty_2)$$

$$P_t = (x_1 + t(x_2 - x_1), y_1 + t(y_2 - y_1))$$

ניתן לבטא נקודה זו גם כך:

$$P_0 = ((1-0)x_1 + 0 \cdot x_2, (1-0)y_1 + 0 \cdot y_2) = (x_1, y_1) = A \quad \text{נציב } t = 0$$

$$P_1 = ((1-1)x_1 + 1 \cdot x_2, (1-1)y_1 + 1 \cdot y_2) = (x_2, y_2) = B \quad \text{נציב } t = 1$$

כפי שנראה מיד, אוסף הנקודות מהצורה P_t (עבור t ממשי כלשהו) הוא קו ישר. הוכחנו שנקודות A ו- B שייכות לישר זה, ולכן הישר המתקבל בדרך זו הוא הישר ℓ .

בדרך זו קיבלנו הצגה

$$\ell = \{P_t \mid t \in \mathbb{R}\} = \{(1-t)x_1 + tx_2, (1-t)y_1 + ty_2 \mid t \in \mathbb{R}\}$$

הצגה זו נקראת **הצגה פרמטרית** של הישר ℓ . המשתנה t הנו משתנה עזר הנקרא פרמטר. על ידי הצבת ערכים שונים בפרמטר t מתקבלות נקודות הישר.

עתה נוכיח את נכונות הנוסחאות:

משפט 10.6

תהיינה $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ נקודות שונות זו מזו. אוסף הנקודות $P_t = ((1-t)x_1 + tx_2, (1-t)y_1 + ty_2)$ (עבור t ממשי כלשהו) הוא הישר העובר דרך הנקודות A ו- B .

הוכחה

נסמן ב- S את אוסף הנקודות מהצורה P_t :

$$S = \{((1-t)x_1 + tx_2, (1-t)y_1 + ty_2) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{נניח ש-} x_1 \neq x_2, \text{ ונגדיר:}$$

אם נקודה (x, y) שייכת לקבוצה S אז מתקיים:

$$(1) \quad \begin{cases} x = (1-t)x_1 + tx_2 = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = (1-t)y_1 + ty_2 = y_1 + t(y_2 - y_1) \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} x - x_1 = t(x_2 - x_1) \\ y - y_1 = t(y_2 - y_1) \end{cases} \quad \text{נעביר אגפים ונקבל:}$$

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a \quad \text{אם } x \neq x_1, \text{ נוכל לחלק בין המשוואות, ולקבל:}$$

$$(3) \quad y = a(x - x_1) + y_1 \quad \text{ולכן}$$

אם $x = x_1$ אז $t = 0$ ולכן $x = x_1, y = y_1$ ועדיין מתקיימת המשוואה (3).

לכן כל הנקודות בקבוצה S נמצאות על הישר המוגדר על ידי המשוואה (3).

כעת נניח שנקודה (x, y) מקיימת את המשוואה (3) ונוכיח שהיא שייכת לקבוצה S :

$$t = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad \text{נגדיר}$$

$$x - x_1 = t(x_2 - x_1) \quad \text{מההגדרה נובע מיידית:}$$

$$y - y_1 = a(x - x_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) = t(y_2 - y_1) \quad \text{מהמשוואה (3) נובע}$$

לכן מתקיימות המשוואות (2) ומהן נובעות המשוואות (1). לכן $(x, y) \in S$.

הראנו, אפוא, שקבוצת הנקודות S מתלכדת עם הישר (3). הנקודות A ו- B שייכות

לקבוצה S (ראינו לעיל שהן מתקבלות עבור $t = 0$ ו- $t = 1$). לכן S היא הישר AB .

לבסוף, במקרה $x_1 = x_2$, הישר AB הוא הישר האופקי $x = x_1$. במקרה זה, כל נקודה P_t

$$P_t = (x_1 + t(x_2 - x_1), y_1 + t(y_2 - y_1)) = (x_1, y_1 + t(y_2 - y_1)) \quad \text{היא}$$

מתקיים $y_2 \neq y_1$ (כי הנקודות $A = (x_1, y_1), B = (x_2, y_2)$ שונות זו מזו), ולכן

$y_2 - y_1 \neq 0$. לכן הביטוי $y_1 + t(y_2 - y_1)$ מקבל כל ערך ממשי אפשרי, ומכאן שקבוצת

הנקודות מהצורה P_t מתלכדת עם הישר $x = x_1$. $\square$

לדוגמה, נכתוב הצגה פרמטרית של הישר העובר דרך הנקודות $(2, 5)$ ו- $(4, -2)$:

$$P_t = ((1-t) \cdot 2 + t \cdot 4, (1-t) \cdot 5 + t \cdot (-2)) = (2t + 2, 5 - 7t)$$

$$\{(2t + 2, 5 - 7t) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

 הישר הוא

שאלה 7

- א. מצאו הצגה פרמטרית של הישר העובר דרך הנקודות $(1, 2)$ ו- $(2, 5)$.
 ב. מצאו הצגה פרמטרית של הישר $2x + y = 4$.

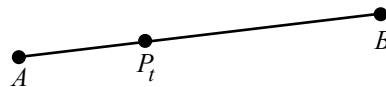
התשובה בעמוד 196

נמשיך להתבונן בהצגה הפרמטרית שמצאנו לישר העובר דרך הנקודות $A = (x_1, y_1)$ ו- $B = (x_2, y_2)$:

$$P_t = ((1-t)x_1 + tx_2, (1-t)y_1 + ty_2)$$

הגדרנו
 וראינו שמתקיים $P_0 = A, P_1 = B$

נתבונן בנקודה P_t עבור $0 \leq t \leq 1$. ניתן לחשוב על הנקודות P_t כמייצגות נסיעה מהנקודה A לנקודה B ועל הפרמטר t כמייצג של הזמן: בזמן $t = 0$ יוצאים מהנקודה A ; בזמן $t = 1$ מגיעים אל הנקודה B ; ובזמנים $0 < t < 1$ נמצאים בדרך מ- A ל- B .



נקודת מבט זו מתיישבת עם הטענה הבאה:

טענה 10.7

- א. הקטע AB הוא אוסף הנקודות $\{P_t \mid 0 \leq t \leq 1\}$.
 ב. לכל $0 < t < 1$, הנקודה P_t מחלקת את הקטע AB ביחס של $(1-t) : t$, כלומר:

$$\overline{AP_t} = t \cdot \overline{AB}, \quad \overline{BP_t} = (1-t) \cdot \overline{AB}$$

 ג. הנקודה $P_{1/2}$ היא אמצע הקטע AB .

טענה זו תוכח בהמשך (ראו שאלה 13). נתעניין במיוחד בחלקה האחרון: נקודת האמצע של הקטע AB היא

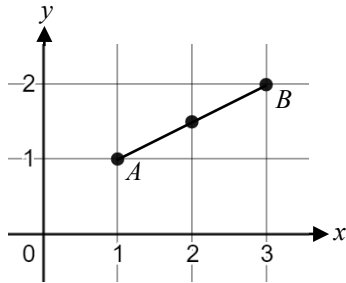
$$P_{1/2} = \left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2, \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 \right)$$

$$P_{1/2} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

כלומר:

לכן כדי למצוא את נקודת האמצע של קטע נתון, עלינו לחשב את הממוצע של קואורדינטות ה- x של נקודות הקצה, ואת הממוצע של קואורדינטות ה- y שלהן, וכך נקבל את הקואורדינטות של נקודת האמצע.

דוגמאות:



א. בהינתן הנקודות

$$A = (1, 1), B = (3, 2)$$

נקודת האמצע של הקטע AB היא

$$\left(\frac{1+3}{2}, \frac{1+2}{2} \right) = (2, 1.5)$$

ב. בהינתן משולש שקודקודיו הם

$$A = (1, 1), B = (5, 3), C = (1, 4)$$

נמצא את משוואת התיכון לצלע AB :

$$P = \left(\frac{1+5}{2}, \frac{1+3}{2} \right) = (3, 2)$$

אמצע הצלע AB הוא הנקודה

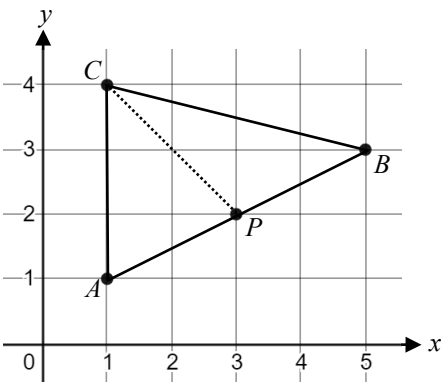
$$\frac{4-2}{1-3} = -1 \quad \text{התיכון המבוקש הוא הקטע CP. שיפועו של קטע זה הוא}$$

משוואת הישר CP (ישר העובר דרך הנקודה $C = (1, 4)$ ושיפועו הוא -1) היא:

$$y = (-1) \cdot (x - 1) + 4$$

$$y = 5 - x$$

כלומר,



שאלה 8

נתונות הנקודות:

$$A = (1, 1), B = (-3, -1)$$

א. מצאו את אמצע הקטע AB.

ב. מצאו את משוואת האנך האמצעי לקטע AB.

התשובה בעמוד 197

שאלה 9

נתון משולש שקודקודיו הם:

$$A = (-3, -5), B = (3, -1), C = (-1, 1)$$

א. מצאו את נקודת המפגש של תיכוני המשולש.

ב. מצאו את מרכז המעגל החוסם את המשולש (היעזרו במשפט 8.40).

התשובה בעמוד 197

שאלה 10

נתון משולש שקודקודיו הם:

$$A = (1, 1), B = (5, 0), C = (2, 7)$$

נסמן ב- A' את אמצע הצלע BC, וב- B' את אמצע הצלע AC.

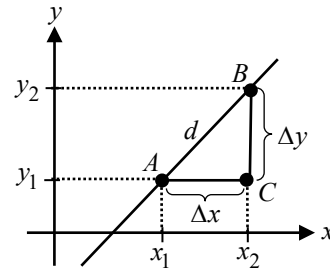
הוכיחו: $A'B' \parallel AB$.

התשובה בעמוד 199

מרחק בין שתי נקודות

נתבונן בזוג נקודות במישור הקרטזי: $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$

כדי לחשב את המרחק ביניהן, $d = \overline{AB}$, נתבונן באיור הבא:



באיור סומנה הנקודה הבאה: $C = (x_2, y_1)$

הקטעים AC , BC מקבילים לצירים. לכן המשולש $\triangle ACB$ הוא ישר זווית ($\angle C = 90^\circ$).

במצב שבאיור מתקיים:

$$\overline{AC} = \Delta x = x_2 - x_1$$

$$\overline{BC} = \Delta y = y_2 - y_1$$

באיור מתקיים $x_1 < x_2$, $y_1 < y_2$. ייתכנו מצבים אחרים (למשל $x_1 > x_2$ או $y_1 > y_2$), אך

בכולם יתקיים $\overline{AC} = |\Delta x|$, $\overline{BC} = |\Delta y|$

לפי משפט פיתגורס:

$$d^2 = |\Delta x|^2 + |\Delta y|^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

ולכן

נוסחה זו נקראת **נוסחת המרחק**.

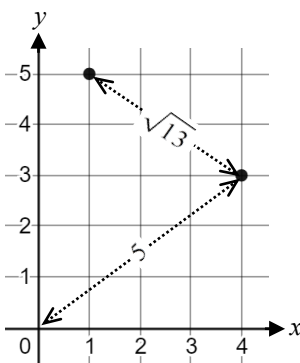
לדוגמה:

א. נחשב את המרחק בין הנקודות $(4, 3)$ ו- $(1, 5)$:

$$d = \sqrt{(4-1)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13} \approx 3.6$$

ב. נחשב את המרחק בין הנקודה $(4, 3)$ והראשית $(0, 0)$:

$$d = \sqrt{(4-0)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$



שאלה 11

א. חשבו את המרחק בין הנקודות $(2, 5)$ ו- $(3, -1)$.

ב. חשבו את המרחק בין הנקודה $(1, -2)$ והראשית.

שאלה 12

נתון משולש שקודקודיו הם: $A = (0,0)$, $B = (6,0)$, $C = (2,5)$

א. חשבו את אורכי צלעות המשולש.

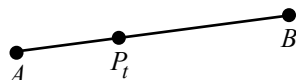
ב. חשבו את אורכי תיכוני המשולש.

התשובה בעמוד 200

באמצעות נוסחת המרחק נוכיח את טענה 10.7, בדבר תכונות ההצגה הפרמטרית של ישר:

נזכיר שעבור הנקודות $A = (x_1, y_1)$ ו- $B = (x_2, y_2)$ הגדרנו

$$P_t = ((1-t)x_1 + tx_2, (1-t)y_1 + ty_2)$$



שאלה 13

א. הוכיחו שלכל t ממשי מתקיים

$$\overline{AP_t} = |t| \cdot \overline{AB}, \quad \overline{BP_t} = |1-t| \cdot \overline{AB}$$

הדרכה: היעזרו בנוסחת המרחק.

ב. הסיקו את טענה 10.7.

התשובה בעמוד 200

משוואת המעגל

תהי $O = (x_0, y_0)$ נקודה במישור הקרטזי, ויהי R מספר חיובי.

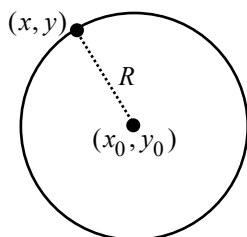
המעגל שמרכזו הוא O ורדיוסו הוא R הנו המקום הגיאומטרי של כל הנקודות במישור

שמרחקן מ- O הוא R .

כדי שנקודה $P = (x, y)$ תהיה על המעגל, נדרש להתקיים אפוא: $\overline{OP} = R$

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = R$$

כלומר, לפי נוסחת המרחק:



שני אגפי המשוואה חיוביים. נעלה בריבוע, ונקבל משוואה שקולה:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

משוואה זו נקראת **משוואת המעגל**. הנקודה (x, y) נמצאת על המעגל שמרכזו (x_0, y_0)

ורדיוסו R אם ורק אם מתקיימת משוואה זו.

דוגמאות:

א. משוואת המעגל שמרכזו בנקודה $(2,3)$ ורדיוסו הוא 5 היא:

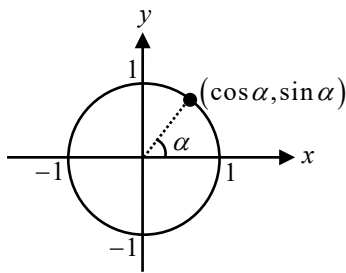
$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$$

ב. משוואת המעגל שמרכזו בנקודה $(0,0)$ ורדיוסו הוא 1 היא:

$$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 1$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

כלומר:



$$x^2 + y^2 = 1$$

מצאנו שמשוואתו של מעגל היחידה היא:

בשיעור הקודם ראינו שלכל α ממשי, הנקודה $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ נמצאת על מעגל היחידה (דבר זה נובע מהדרך שבה הוגדרו פונקציות הסינוס והקוסינוס). נקודה זו מקיימת את משוואת המעגל, ומכאן נקבל מחדש את הזהות המוכרת:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

משוואת המעגל מאפשרת להוכיח את הטענה ההפוכה:

בהינתן מספרים x, y המקיימים $x^2 + y^2 = 1$, יש זווית α המקיימת

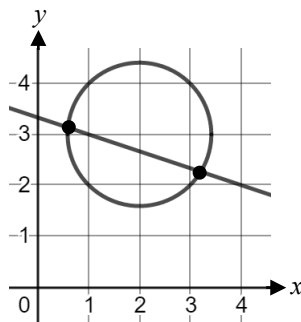
$$(1) \quad \cos \alpha = x, \sin \alpha = y$$

ואכן, התקיימות המשוואה $x^2 + y^2 = 1$ גוררת שהנקודה (x, y) נמצאת על מעגל היחידה. נגדיר את α כזווית שבין ציר ה- x לרדיוס אל נקודה זו במעגל היחידה, ונקבל את השוויונות (1).

שאלה 14

- כתבו את משוואת המעגל שמרכזו בנקודה $(2, -2)$ ורדיוסו 5.
- כתבו את משוואת המעגל שמרכזו בנקודה $(0, 1)$ ורדיוסו 3.
- הוכיחו שהמשוואה $x^2 + 4x + y^2 + y = 1$ מגדירה מעגל, ומצאו את המרכז והרדיוס שלו. **הדרכה:** השלימו לריבוע את הביטויים $x^2 + 4x$ ו- $y^2 + y$ כפי שנלמד בשיעור 3.
- הוכיחו שהמשוואה $x^2 + y^2 = 2x + 3y$ מגדירה מעגל, ומצאו את המרכז והרדיוס שלו.

התשובה בעמוד 201



חיתוך בין ישר ומעגל

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 2$$

נתבונן, לדוגמה, במעגל

$$x + 3y = 10$$

ובישר:

מהתבוננות באיור שמשמאל, ניתן להתרשם כי הישר והמעגל נפגשים בשתי נקודות.

כדי להוכיח זאת, ולאחר את נקודות החיתוך, עלינו לפתור את מערכת המשוואות בנעלמים x, y המתקבלת ממשוואות הישר והמעגל.

$$\begin{aligned} (1) \quad x &= 10 - 3y && \text{ממשוואת הישר נקבל:} \\ (10 - 3y - 2)^2 + (y - 3)^2 &= 2 && \text{נציב במשוואת המעגל:} \\ 10y^2 - 54y + 71 &= 0 && \text{לאחר פישוט, מתקבלת המשוואה הריבועית} \\ y &= \frac{54 \pm \sqrt{76}}{20} = \frac{27 \pm \sqrt{19}}{10} && \text{שפתרונותיה הם} \end{aligned}$$

מכל ערך אפשרי של y מתקבל ערך של x (לפי המשוואה (1)), וכך מתקבלת נקודה (x, y) המשותפת לישר ולמעגל:

$$y = \frac{27 + \sqrt{19}}{10} \approx 3.14 \Rightarrow x = 10 - 3y = \frac{19 - 3\sqrt{19}}{10} \approx 0.59$$

$$y = \frac{27 - \sqrt{19}}{10} \approx 2.26 \Rightarrow x = 10 - 3y = \frac{19 + 3\sqrt{19}}{10} \approx 3.21$$

$$\left(\frac{19 - 3\sqrt{19}}{10}, \frac{27 + \sqrt{19}}{10} \right) \approx (0.59, 3.14) \quad \text{נקודות החיתוך הן אפוא:}$$

$$\left(\frac{19 + 3\sqrt{19}}{10}, \frac{27 - \sqrt{19}}{10} \right) \approx (3.21, 2.26)$$

הערה: בפתרון מערכת של משוואות, צעדי השקילות הם (כפי שלמדנו בשיעור 3) צעדי שקילות בין מערכות משוואות. במקרה שניתחנו, צעדי השקילות הם:

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-3)^2 = 2 \\ x+3y=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 + (y-3)^2 = 2 \\ x=10-3y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (10-3y-2)^2 + (y-3)^2 = 2 \\ x=10-3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10y^2 - 54y + 71 = 0 \\ x=10-3y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{27 \pm \sqrt{19}}{10} \\ x = 10 - 3y \end{cases} \Leftrightarrow y = \frac{27 \pm \sqrt{19}}{10}, x = \frac{19 \mp \sqrt{19}}{10}$$

בהמשך שיעור זה נימנע מהצגת שקילויות אלה, מטעמי קיצור.

שאלה 15

מצאו את נקודות החיתוך של המעגל שמרכזו בנקודה (3,1) ורדיוסו $\sqrt{2}$ עם כל אחד מהישרים הבאים:

א. $x + y = 4$

ב. $x + y = 2$

ג. $x + y = 0$

התשובה בעמוד 202

חיתוך בין שני מעגלים

ענה נדגים מציאה של חיתוך בין שני מעגלים. נתבונן בשני המעגלים הבאים:

$$(x-1)^2 + y^2 = 10$$

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 8$$

כדי למצוא את נקודותיהם המשותפות, נפתור את המערכת של שתי משוואות אלה.

$$(x-1)^2 - (x+2)^2 + y^2 - (y-1)^2 = 2 \quad \text{נחסר בין שתי המשוואות:}$$

$$x^2 - 2x + 1 - (x^2 + 4x + 4) + y^2 - (y^2 - 2y + 1) = 2 \quad \text{נפתח סוגריים:}$$

$$2y - 6x = 6 \quad \text{לאחר כינוס איברים דומים, נקבל:}$$

$$y = 3x + 3 \quad \text{כלומר:}$$

קיבלנו משוואה של ישר. לכן נקודות החיתוך של שני המעגלים יתקבלו כנקודות החיתוך של הישר עם כל אחד משני המעגלים.

נציב $y = 3x + 3$ במשוואת המעגל הראשון:

$$(x-1)^2 + (3x+3)^2 = 10$$

$$10x^2 + 16x + 10 = 10$$

$$10x^2 + 16x = 0$$

$$x(10x + 16) = 0$$

פתרונות המשוואה הם: $x = 0$ ו- $x = -16/10 = -1.6$.

מהפתרון $x = 0$ מתקבל $y = 3x + 3 = 3$;

מהפתרון $x = -1.6$ מתקבל $y = 3x + 3 = -1.8$.

נקודות החיתוך הן $(0, 3)$ ו- $(-1.6, -1.8)$.

שאלה 16

מצאו את נקודות החיתוך של שני המעגלים:

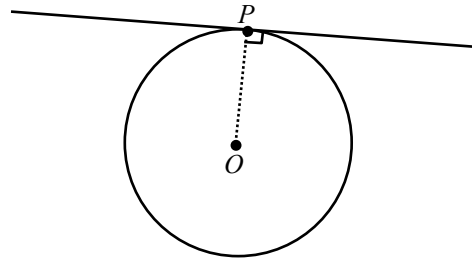
$$(x+3)^2 + y^2 = 17, \quad (x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$$

התשובה בעמוד 203

משיק למעגל

כזכור משיעור 8, ישר הוא משיק למעגל אם יש לישר ולמעגל נקודת חיתוך יחידה.

בהינתן מעגל ונקודה P עליו, כדי לחשב את משוואת המשיק למעגל בנקודה P ניעזר במשפטים 8.38 ו-8.39, שלפיהם ישר דרך P הוא משיק למעגל אם ורק אם הוא מאונך לרדיוס אל הנקודה P .



לדוגמה, נתבונן במעגל

$$x^2 + (y-1)^2 = 5$$

ובנקודה $P = (2, 2)$ שעליו (ודאו!).

כדי למצוא את המשיק למעגל דרך הנקודה P , נמצא תחילה את מרכז המעגל:

משוואת המעגל היא $(x-0)^2 + (y-1)^2 = 5$ ולכן מרכז המעגל הוא הנקודה $O = (0, 1)$.

$$a = \frac{2-1}{2-0} = \frac{1}{2}$$

כעת נמצא את שיפוע הקטע OP :

המשיק למעגל בנקודה P מאונך לקטע OP , ולכן שיפועו הוא

$$-1/a = -2$$

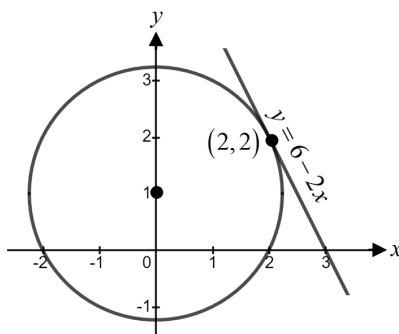
נותר רק לכתוב את משוואת הישר דרך P ששיפועו הוא -2 :

$$y = -2(x-2) + 2$$

$$y = 6 - 2x$$

ולאחר פישוט:

זהו המשיק המבוקש.



שאלה 17

מצאו את משוואת המשיק למעגל $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 2$:

א. בנקודה $(2,1)$.

ב. בנקודה $(\sqrt{2}+1, 2)$.

התשובה בעמוד 204

מציאת משיק בשיטת הדיסקרימיננטה

השיטה הבאה מאפשרת לחשב את משוואת המשיק גם כשנקודת ההשקה אינה ידועה אלא ידוע נתון אחר על הישר המשיק. בהמשך נשתמש בה לחישוב משיקים לצורות נוספות.

בשיעור 3 פיתחנו את נוסחת השורשים לפתרון משוואה ריבועית, והוכחנו שבהינתן משוואה ריבועית $ax^2 + bx + c$ (עם $a \neq 0$), מספר הפתרונות של המשוואה נקבע על פי הדיסקרימיננטה $D = b^2 - 4ac$. מניתוח זה נובע שלמשוואה יש פתרון יחיד אם ורק אם $D = 0$.

בשיטת הדיסקרימיננטה, נסתמך על תכונה זו כדי למצוא משיק, על פי השלבים הבאים:

1. נכתוב את משוואת הישר המבוקש כתלות בפרמטר מסוים (נקרא לו a).
 2. נכתוב את מערכת המשוואות המורכבת ממשוואת הישר ומשוואת המעגל.
 3. ממערכת זו נחליץ את אחד המשתנים ונקבל משוואה ריבועית בנעלם אחד (x או y).
 4. נחשב את הדיסקרימיננטה של המשוואה הריבועית, D . הביטוי שנקבל יהיה תלוי בפרמטר a .
 5. נמצא את ערכי הפרמטר a שעבורם הדיסקרימיננטה מתאפסת, כלומר, נפתור את המשוואה $D = 0$ ביחס לנעלם a .
 6. מכל ערך של a שקיבלנו, נקבל משוואה של משיק למעגל.
- ואכן, עבור ערכים כאלה של a , קיום פתרון יחיד למשוואה הריבועית המתאימה מבטיח שהישר חותך את המעגל בנקודה יחידה, כלומר, שהישר משיק למעגל.
- נדגים את השיטה במציאת משיק למעגל $(x-3)^2 + y^2 = 2$ העובר דרך הנקודה $(0,0)$, שאינה על המעגל.

נתבונן בישר ℓ העובר בנקודה $(0,0)$, ונברר באילו תנאים ישר זה משיק למעגל.

אם הישר ℓ הוא אנכי, אז משוואתו היא $x = 0$. ישר זה לא נחתך כלל עם המעגל, כי הצבה $x = 0$ במשוואת המעגל מביאה למשוואה $9 + y^2 = 2$, ואין למשוואה זו פתרון. לכן ישר כזה אינו משיק למעגל.

נניח מעתה שהישר ℓ אינו אנכי, ונסמן ב- a את שיפועו.

$$y = ax$$

משוואת הישר ℓ היא

מערכת המשוואות המגדירה את נקודות החיתוך של הישר ℓ והמעגל היא

$$\begin{cases} (x-3)^2 + y^2 = 2 \\ y = ax \end{cases}$$

$$(x-3)^2 + (ax)^2 = 2$$

נציב $y = ax$ במשוואת המעגל:

$$x^2 - 6x + 9 + a^2x^2 = 2$$

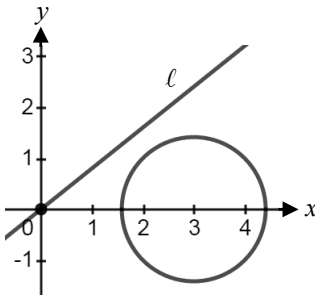
כלומר:

$$(1) \quad (a^2 + 1)x^2 - 6x + 7 = 0$$

מתקבלת המשוואה הריבועית

$$D = 6^2 - 4(a^2 + 1) \cdot 7 = 8 - 28a^2$$

הדיסקרימיננטה של משוואה זו היא



כדי שהישר ℓ ישיק למעגל, צריכה להיות להם נקודה משותפת יחידה. תנאי זה שקול לכך שלמשוואה הריבועית (1) יש פתרון יחיד, כלומר ש- $D = 0$.

$$8 - 28a^2 = 0$$

נפתור אפוא את המשוואה הבאה, כשהנעלם הוא a :

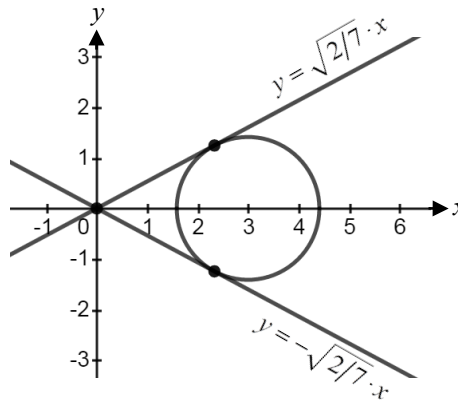
$$a^2 = \frac{8}{28} = \frac{2}{7}$$

$$a = \pm \sqrt{\frac{2}{7}}$$

מצאנו שני פתרונות, המתאימים לשני ישרים משיקים:

$$y = \sqrt{\frac{2}{7}} \cdot x, \quad y = -\sqrt{\frac{2}{7}} \cdot x$$

משיקים אלה מוצגים באיור הבא:



נמצא את נקודות ההשקה: נקודת ההשקה של המשיק $y = \sqrt{2/7} \cdot x$ היא נקודת החיתוך בין ישר זה למעגל. כדי למצוא אותה, נציב $y = \sqrt{2/7} \cdot x$ במשוואת המעגל:

$$(x-3)^2 + (\sqrt{2/7}x)^2 = 2$$

מתקבלת המשוואה הריבועית (שהיא המשוואה (1) בהצבה $a = \sqrt{2/7}$):

$$\frac{9}{7}x^2 - 6x + 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow 9x^2 - 42x + 49 = 0$$

הדיסקרימיננטה של משוואה ריבועית זו מתאפסת (כך דאגנו שיקרה). פתרונה היחיד הוא

$$x = \frac{42 + 0}{18} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$$

נציב במשוואת המשיק ונקבל את קואורדינטת y של נקודת ההשקה:

$$y = \sqrt{\frac{2}{7}}x = \sqrt{\frac{2}{7}} \cdot \frac{7}{3} = \frac{\sqrt{14}}{3} \approx 1.25$$

נקודת ההשקה היא אפוא: $(7/3, \sqrt{14}/3) \approx (2.33, 1.25)$

באופן דומה, נקודת ההשקה של המשיק $y = -\sqrt{2/7} \cdot x$ היא

$$(7/3, -\sqrt{14}/3) \approx (2.33, -1.25)$$

שאלה 18

א. מצאו את כל המשיקים למעגל היחידה $x^2 + y^2 = 1$ העוברים דרך הנקודה $(2, 0)$, ואת נקודות ההשקה.

ב. מצאו את כל המשיקים למעגל $x^2 + y^2 = 2$ המקבילים לישר $y = 3x$.

התשובה בעמוד 204

שניוניות במישור

עד לשלב זה, מצאנו את המשוואות המגדירות צורות גיאומטריות נתונות: ישרים ומעגלים. עתה, נתעניין בשאלה ההפוכה: בהינתן משוואה אלגברית, מהי הצורה במישור המתוארת על ידיה?

צורתה הכללית של משוואה ממעלה שנייה במשתנים x, y היא:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

במשוואה זו, A, B, C, D, E, F הם פרמטרים המייצגים מספרים קבועים. אנו מניחים שלפחות אחד המספרים A, B, C שונה מ-0.

צורה במישור המוגדרת על ידי משוואה זו (עבור ערכים נתונים של A, B, C, D, E, F) נקראת **שניונית**.

לדוגמה, כל מעגל הוא שניונית: משוואת המעגל היא

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

ובהצגה שקולה, $x^2 - 2x_0x + x_0^2 + y^2 - 2y_0y + y_0^2 - R^2 = 0$

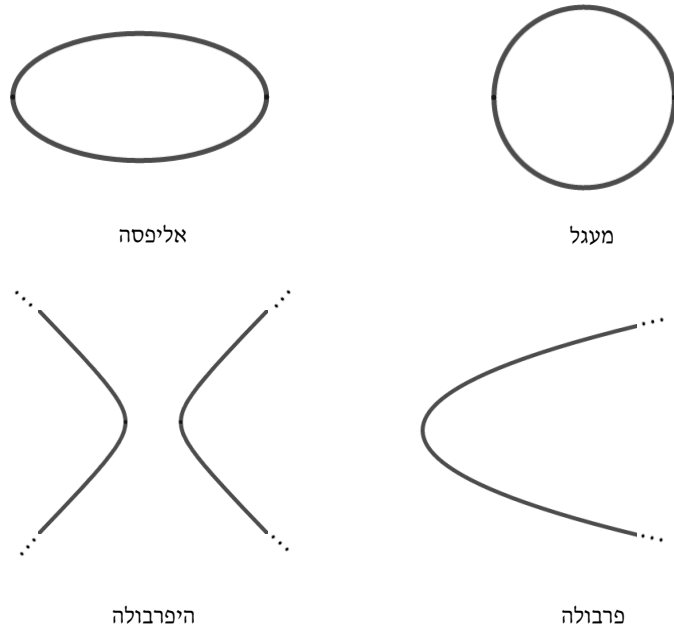
משוואה זו היא משוואת שניונית עם הקבועים

$$A = 1, B = 0, C = 1, D = -2x_0, E = -2y_0, F = x_0^2 + y_0^2 - R^2$$

- במקרים מסוימים השניונית היא קו ישר, זוג ישרים, נקודה, או קבוצה ריקה. הנה דוגמאות:
- המשוואה $xy = 0$ שקולה לכך ש־ $x = 0$ או $y = 0$ ולכן מגדירה זוג ישרים (ציר ה־ x וציר ה־ y).
 - המשוואה $x^2 = 0$ שקולה לכך ש־ $x = 0$ ולכן מגדירה קו ישר (ציר ה־ y).
 - המשוואה $x^2 + y^2 = 0$ שקולה לכך ש־ $x = y = 0$ ולכן מגדירה נקודה (הנקודה $(0, 0)$).
 - למשוואה $x^2 + 1 = 0$ אין פתרונות כלל, ולכן היא מגדירה את הקבוצה הריקה.

מקרים אלה נקראים **מקרים מנוונים**.

במקרים שאינם מנוונים, השניונית היא קו עקום במישור, שיכול להיות מאחד הסוגים הבאים: **מעגל**, **אליפסה**, **פרבולה** או **היפרבולה**.



לכל אחד מסוגי השניוניות מקובל לייחס **צורה קנונית**. הכוונה היא לתת־משפחה של שניוניות מסוג מסוים, אשר נבחרה באופן שרירותי כדי לייצג את שאר השניוניות מסוגה. כל שניונית מהקבוצה הנבחרת נקראת קנונית. כל שניונית אחרת ניתן להעביר לצורה קנונית יחידה על ידי פעולות חפיפה: הזזה, שיקוף או סיבוב.

לדוגמה, הצורה הקנונית של מעגל היא מעגל שמרכזו בראשית הצירים. כל מעגל אחר ניתן להביא לצורה קנונית על ידי הזזת מרכזו לראשית הצירים. המעגלים הקנוניים הם, כאמור, המעגלים שמרכזם בראשית הצירים. נשים לב שאף מעגל קנוני אינו חופף למעגל קנוני אחר, שהרי לשני מעגלים קנוניים שונים יש רדיוסים שונים.

באנלוגיה לרעיון הצורה הקנונית נוכל לחשוב על מוזיאון טבע המחזיק חיה אחת ויחידה מכל סוג; חיה זו היא 'החיה הקנונית'. עבור כל חיה שבעולם, נוכל למצוא במוזיאון חיה אחת ויחידה מאותו הסוג.

משוואתו של המעגל הקנוני היא, אפוא,

$$x^2 + y^2 = R^2$$

נוכל לייצג משוואה זו גם כך:

$$\left(\frac{x}{R}\right)^2 + \left(\frac{y}{R}\right)^2 = 1$$

נעבור להיכרות עם האליפסה, הפרבולה וההיפרבולה. נכיר את הגדרתן וכמה מתכונותיהן (בהשמטת ההוכחות, במרבית המקרים), ונבצע חישובים לגביהן.

האליפסה

האליפסה מוגדרת כך:

אליפסה היא המקום הגיאומטרי של כל הנקודות אשר סכום מרחקיהן משתי נקודות נתונות שווה למספר קבוע נתון. שתי הנקודות נקראות **מוקדי האליפסה**.

אם נסמן את מוקדי האליפסה ב- F_1, F_2 , ואת המספר הקבוע ב- $2a$, נקבל שנקודות האליפסה מאופיינות על ידי התנאי

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$$

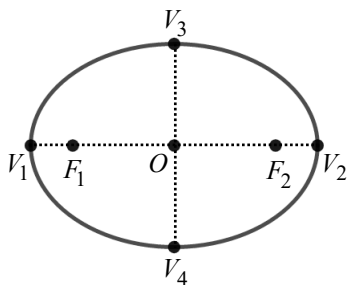
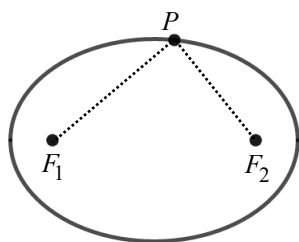
באופן מעשי ניתן לצייר אליפסה כך: נצמיד נייר אל לוח עץ באמצעות שני נעצים הממוקמים במוקדי האליפסה. נקשור חוט שאורכו $2a$ בין שני הנעצים. נתווה קו באמצעות עיפרון שחודו מונח בנקודה P באופן שמביא את החוט למצבו המתוח ביותר. בדרך זו, אורכיהם של חלקי החוט משני צדי חוד העיפרון יהיו $\overline{PF_1}$ ו- $\overline{PF_2}$, ולכן יתקיים התנאי $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$. העיפרון יתווה, לכן, את האליפסה.

ניתן להבחין כי לאליפסה יש שני צירי סימטריה. ואכן, אם נחבר את מוקדי האליפסה נקבל ציר סימטריה של האליפסה, הנקרא **ציר הסימטריה הראשי** של האליפסה.

הנקודה O , מרכז הקטע F_1F_2 , נקראת **מרכז האליפסה**. האנך האמצעי לקטע F_1F_2 הוא ציר סימטריה נוסף של האליפסה, הנקרא **ציר הסימטריה המשני**.

נסמן ב- V_1, V_2 את נקודות החיתוך של האליפסה עם ציר הסימטריה הראשי, וב- V_3, V_4 את נקודות החיתוך של האליפסה עם ציר הסימטריה המשני. הנקודות V_1, V_2, V_3, V_4 נקראות **קודקודי האליפסה**. המרחק $\overline{V_1V_2}$ נקרא **אורך האליפסה**, והמרחק $\overline{V_3V_4}$ נקרא **רוחב האליפסה**. ניתן להוכיח שאורך האליפסה הוא $2a$.

אחד המקומות שבהם מופיעות אליפסות במדעי הטבע הוא האסטרונומיה: אליפסות מתארות את מסלוליהם של כוכבי לכת. עובדה זו התגלתה על ידי המתמטיקאי והאסטרונם הגרמני יוהאנס קפלר (1571–1630). לדוגמה, מסלולו של כדור הארץ סביב השמש הוא אליפסה, שהשמש נמצאת באחד ממוקדיה.



הצורה הקנונית של האליפסה

אליפסה קנונית היא אליפסה שצירי הסימטריה שלה נמצאים על צירי המערכת הקרטזית: ציר הסימטריה הראשי נמצא על ציר ה- x , וציר הסימטריה המשני נמצא על ציר ה- y .

נסמן את אורך האליפסה (כבעבר) ב- $2a$, ואת רוחבה ב- $2b$. מתקיים בהכרח: $a > b$. משוואת האליפסה הקנונית היא:

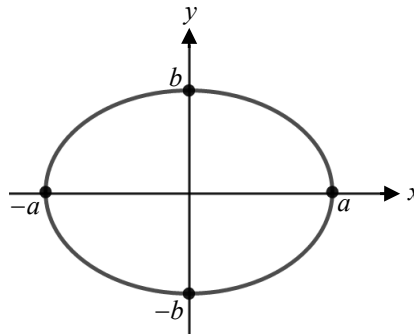
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ממשוואה זו ניתן לראות בנקל שצירי המערכת הקרטזית הם צירי סימטריה של האליפסה הקנונית: אם נקודה $p = (x, y)$ שייכת לאליפסה אז גם הנקודות $(-x, y)$ (שיקוף הנקודה p ביחס לציר ה- y) ו- $(x, -y)$ (שיקוף הנקודה p ביחס לציר ה- x) שייכות לאליפסה:

$$\frac{(-x)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{(-y)^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ממשוואת האליפסה נוכל למצוא בנקל את נקודות החיתוך עם הצירים: נקודות החיתוך עם ציר ה- x הן $(\pm a, 0)$, ונקודות החיתוך עם ציר ה- y הן $(0, \pm b)$.

האליפסה נראית כך:



מוקדי האליפסה נתונים על ידי הנוסחאות הבאות: $F_1 = (-c, 0)$, $F_2 = (c, 0)$

בנוסחאות אלה c נתון על ידי

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

לא נוכיח את הנוסחאות של משוואת האליפסה הקנונית ומיקומי המוקדים.

שאלה 19

נתונה המשוואה: $x^2 + 2y^2 = 4$

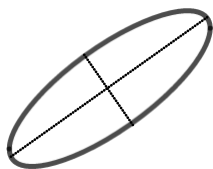
א. הוכיחו שמשוואה זו מגדירה אליפסה קנונית.

ב. חשבו את אורך ורוחב האליפסה.

ג. מצאו את קודקודי האליפסה.

ד. מצאו את מוקדי האליפסה.

אליפסות מקבילות לצירים



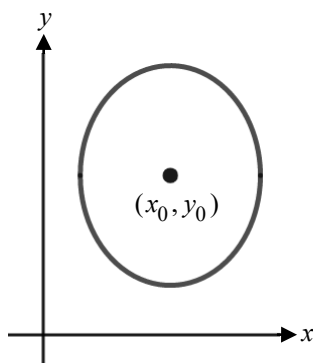
צירי הסימטריה של אליפסה כללית הם אמנם ניצבים זה לזה, אך אינם בהכרח מקבילים לצירי המערכת הקרטזית. באיור שמשמאל ניתן לראות אליפסה שצירי הסימטריה שלה נטויים על צידם. מטעמי פשטות, נתמקד באליפסות שציריהן מקבילים לצירי המערכת הקרטזית. נקרא לאליפסה כזו 'אליפסה מקבילה לצירים'.

המשוואה הכללית של אליפסה מקבילה לצירים היא:

$$(1) \quad \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

במשוואה זו a ו- b הם מספרים חיוביים קבועים, ו- $a \neq b$. מרכז של האליפסה הוא בנקודה (x_0, y_0) .

במקרה ש- $a > b$, אליפסה זו היא הזזה של האליפסה הקנונית: לכל נקודה (x, y) המקיימת את משוואת האליפסה הקנונית $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, תימצא הנקודה $(x+x_0, y+y_0)$ על האליפסה (1).



לכן במקרה זה, ציר הסימטריה הראשי מקביל לציר ה- x , והמוקדים הם בנקודות $(x_0 \pm c, y_0)$, כש- $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

במקרה $a < b$, מתקבלת אליפסה שציר הסימטריה הראשי שלה מקביל לציר ה- y . מוקדיה של אליפסה זו נמצאים בנקודות $(x_0, y_0 \pm c)$, כש- $c = \sqrt{b^2 - a^2}$; אורכה הוא $2b$ ורוחבה הוא $2a$. אליפסה כזו מוצגת באיור שמשמאל.

שאלה 20

נתונה המשוואה: $3(x-1)^2 + 2(y-2)^2 = 12$

א. הוכיחו שמשוואה זו מגדירה אליפסה, ומצאו את אורכה ואת רוחבה.

ב. מצאו את מוקדי האליפסה.

ג. מצאו את נקודות החיתוך בין האליפסה לבין הישר $y = 2x - 1$.

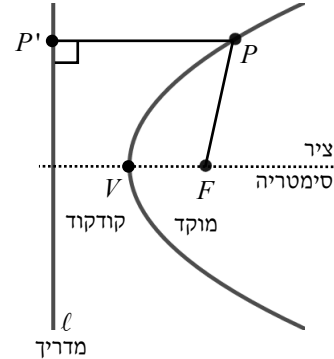
התשובה בעמוד 206

הפרבולה

הפרבולה מוגדרת כך:

פרבולה היא המקום הגיאומטרי של כל הנקודות אשר מרחקן מנקודה נתונה שווה למרחקן מישיר נתון.

הנקודה שבהגדרה נקראת **מוקד הפרבולה**, והישר נקרא **מדריך הפרבולה**.
 נסמן: F = מוקד הפרבולה, ℓ = מדריך הפרבולה.
 עבור נקודה P , נסמן ב- P' את היטל הנקודה על הישר ℓ .



בסימונים אלה, התנאי להשתייכות הנקודה P לפרבולה הוא השוויון:

$$\overline{PF} = \overline{PP'}$$

מתיאור זה ניתן לראות שלפרבולה יש ציר סימטריה, והוא הישר המאונך למדריך ועובר דרך המוקד. נקודת החיתוך של ציר הסימטריה עם הפרבולה נקראת **קודקוד הפרבולה**.

פרבולה קנונית

עבור פרבולה כללית, נסמן ב- p את מרחק המוקד מהמדריך. מרחק זה הוא מספר חיובי הקובע את צורתה של הפרבולה; כל שתי פרבולות שעבורן משתנה זה זהה, הן חופפות.

$$f = \frac{p}{2} \quad \text{נסמן:}$$

בפרבולה קנונית, הישר המדריך הוא $x = -f$, ומוקד הפרבולה נמצא בנקודה $F = (f, 0)$.

עבור נקודה נתונה $P = (x, y)$, היטל הנקודה על הישר המדריך הוא הנקודה $P' = (-f, y)$.

$$\overline{PF} = \sqrt{(x-f)^2 + y^2} \quad \text{לפי נוסחת המרחק:}$$

$$\overline{PP'} = \sqrt{(x+f)^2 + 0} = |x+f|$$

$$\sqrt{(x-f)^2 + y^2} = |x+f| \quad \text{לכן תנאי ההשתייכות לפרבולה הוא}$$

$$\Leftrightarrow (x-f)^2 + y^2 = (x+f)^2 \quad \text{נעלה בריבוע:}$$

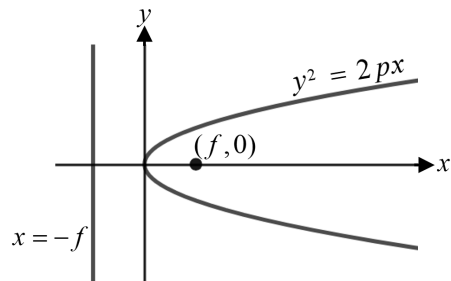
$$\Leftrightarrow y^2 = 4fx \quad \text{לאחר פתיחת סוגריים ופישוט, נקבל:}$$

$$\boxed{y^2 = 2px}$$

כלומר

משוואה זו היא משוואת הפרבולה הקנונית.

באיור הבא ניתן לראות את הפרבולה הקנונית, עם המוקד והמדריך.



פרבולות מקבילות לצירים

במקרה שציר הסימטריה של פרבולה מקביל לאחד מצירי המערכת הקרטזית, נאמר שהפרבולה עצמה מקבילה לאותו הציר.

המשוואה הכללית של פרבולה המקבילה לציר ה- x היא:

$$x = ay^2 + by + c$$

(עבור $a \neq 0, a, b, c \in \mathbb{R}$).

ניתן להיווכח בכך על ידי ביצוע פעולות של הזזה ו/או שיקוף ביחס לציר ה- y על פרבולה קנונית.

המשוואה הכללית של פרבולה המקבילה לציר ה- y מתקבלת מהחלפת תפקידי x ו- y במשוואה הקודמת:

$$y = ax^2 + bx + c$$

משוואה זו מוכרת לנו כגרף הפונקציה הריבועית $f(x) = ax^2 + bx + c$.

היפרבולה

ההיפרבולה מוגדרת כך:

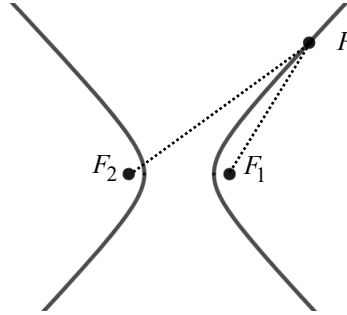
היפרבולה היא המקום הגיאומטרי של כל הנקודות שהפרש מרחקיהן משתי נקודות נתונות שווה, בערכו המוחלט, לקבוע נתון.

הנקודות הנתונות נקראות **מוקדי ההיפרבולה**; נסמן אותן ב- F_1 וב- F_2 . נסמן את הקבוע שבהגדרה ב- $2a$.

תנאי ההשתייכות של נקודה P להיפרבולה הוא:

$$|\overline{F_1P} - \overline{F_2P}| = 2a$$

בדומה לאליפסה, להיפרבולה יש שני צירי סימטריה ניצבים. ציר הסימטריה הראשי הוא הישר F_1F_2 . ציר הסימטריה המשני הוא האנך האמצעי לקטע F_1F_2 . ההיפרבולה נראית כך:



בהיפרבולה קנונית, ציר הסימטריה הראשי הוא ציר ה- x , וציר הסימטריה המשני הוא ציר ה- y . משוואת ההיפרבולה הקנונית היא:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

עבור a, b חיוביים כלשהם.

מוקדיה של היפרבולה זו נתונים על ידי הנוסחאות $F_1 = (c, 0)$, $F_2 = (-c, 0)$

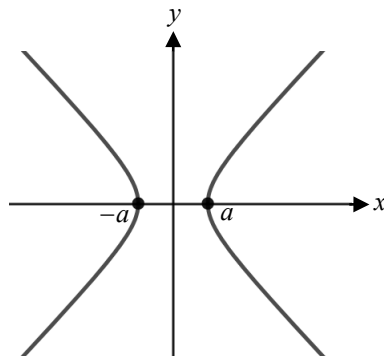
בנוסחאות אלה c נתון על ידי

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

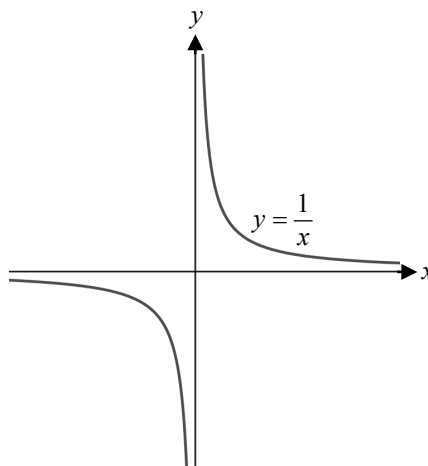
נקודות החיתוך של ההיפרבולה עם ציר הסימטריה המרכזי שלה מתקבלות בהצבה $y = 0$

במשוואת ההיפרבולה: $x = \pm a$, כלומר, הנקודות הן $(\pm a, 0)$. נקודות אלה נקראות **קודקודי ההיפרבולה**.

באיור מוצגת ההיפרבולה הקנונית ביחס לצירים:



דוגמה נוספת של היפרבולה, שאינה מקבילה לצירים, מוגדרת על ידי המשוואה $xy = c$, עבור $c \neq 0$ כלשהו. משוואה זו שקולה למשוואה $y = c/x$, ולכן הצורה שמוגדרת על ידי היא גרף הפונקציה $f(x) = c/x$. לדוגמה, עבור $c = 1$, מתקבל הגרף המוכר של הפונקציה $f(x) = 1/x$:



משיק לשניונית

הכרנו שלושה סוגים חדשים של עקומים במישור: האליפסה, הפרבולה וההיפרבולה. כל אחד מהם הוא שניונית לא מנוונת. בדומה למשיק למעגל, טבעי לשאול מהם הישרים המשיקים לעקומים אלה בנקודות שונות.

נתבונן, לדוגמה, בפרבולה $y = x^2$, ובנקודה $P = (1, 1)$ שעליה. נחפש ישר העובר דרך הנקודה P ונחתך עם הפרבולה בנקודה זו בלבד. לצורך כך נשתמש בשיטת הדיסקרימיננטה.

אם הישר הוא בעל שיפוע a , אז משוואתו היא $y = a(x - 1) + 1$

וכדי למצוא את נקודות החיתוך של הישר והפרבולה, יש לפתור את המשוואה

$$a(x - 1) + 1 = x^2$$

$$x^2 - ax + (a - 1) = 0$$

נבטא משוואה זו כך:

$$a^2 - 4(a - 1) = a^2 - 4a + 4 = (a - 2)^2$$

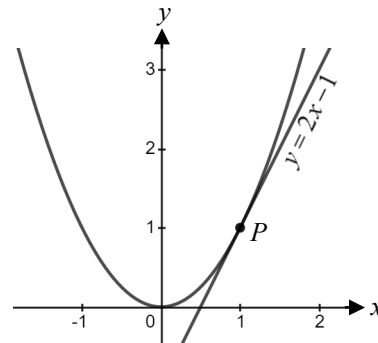
הדיסקרימיננטה של משוואה זו היא

הדיסקרימיננטה מתאפסת, אפוא, רק עבור $a = 2$. שיפוע זה מניב את הישר

$$y = 2(x - 1) + 1 = 2x - 1$$

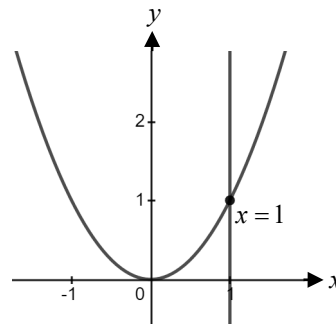
הנחתך עם הפרבולה בנקודה אחת ויחידה.

נתבונן בפרבולה ובישר:



אמנם לא הגדרנו עדיין מהו משיק לפרבולה, אך מהתבוננות בגרף ניתן להתרשם שהישר $y = 2x - 1$ ראוי לתואר זה: ככל שנתמקד באזור קטן יותר סביב הנקודה P , כך יתקרב מקטע הפרבולה שבאזור זה בצורתו למקטע הישר.

האם תכונה נאה זו נובעת מכך שהישר והפרבולה נחתכים בנקודה אחת בלבד? כאן עלינו להיות זהירים. הישר האנכי $x = 1$ הוא ישר נוסף הנחתך עם הפרבולה בנקודה אחת בלבד, אך אינו מקיים את תכונת ההתקרבות שתוארה לעיל.



לכן נגדיר משיק לפרבולה כך:

משיק לפרבולה הוא ישר בעל נקודת חיתוך יחידה עם הפרבולה, שאינו מקביל לציר הסימטריה של הפרבולה.

בהתאם להגדרה זו, הישר $y = 2x - 1$ הוא משיק לפרבולה $y = x^2$ בנקודה $(1,1)$.

הגדרת משיק לאליפסה הנה פשוטה יותר, וזוהי להגדרת המשיק למעגל:

משיק לאליפסה הוא ישר בעל נקודת חיתוך יחידה עם האליפסה.

נתרגל מציאת משיקים, בהתאם להגדרות אלה, בשאלה הבאה.

שאלה 21

א. מצאו את כל המשיקים לפרבולה $y = x^2$ העוברים דרך הנקודה $(2, -1)$ (שימו לב: נקודה זו לא נמצאת על הפרבולה).

ב. מצאו את כל המשיקים לאליפסה $x^2 + 2y^2 = 1$ העוברים דרך הנקודה $(-5, 0)$.

התשובה בעמוד 206

בשיעור הבא נכיר דרך פשוטה ושיטתית יותר למציאת משיקים לעקום. במסגרתה נוכל לחשב משיקים בקלות רבה לכל סוגי השניוניות, וגם לצורות נוספות.

סיכום שיעור 10

בשיעור זה למדנו על המשוואות המגדירות צורות שונות במישור: ישרים, מעגלים, ושניוניות כלליות. בדרך זו פתרנו בעיות גיאומטריות בדרכים אלגבריות.

פיתחנו מעין מילון המאפשר לתרגם מושגים מהגיאומטריה לאלגברה. נקודה תורגמה לזוג מספרים ממשיים; צורה תורגמה למשוואה. בעיית מציאת החיתוך של שתי צורות הפכה לבעיית הפתרון של מערכת משוואות. מושג ההקבלה של ישרים תורגם לשוויון של שיפוע; מושג הישרים הניצבים תורגם לתנאי על מכפלת שיפועיהם; וכן הלאה.

תוצרי הלמידה החשובים ביותר של שיעור זה הם הכרת מילון זה והתמצאות בו. אלה ישרתו אותנו גם בחלקיו האחרונים של הקורס.

שאלות להערכה עצמית

שאלה 22

המעגל $x^2 + (y-1)^2 = 4$ נחתך עם הישר $2y + x = 1$ בשתי נקודות. חשבו את המרחק בין נקודות אלה.

התשובה בעמוד 207

שאלה 23

חשבו את המרחק בין הנקודה $(0, 3)$ והישר $\{(1-t, 3+2t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

התשובה בעמוד 208

שאלה 24

חשבו את הזווית בין הישרים $2x + 3y = 1$ ו- $x - 2y = 5$.

התשובה בעמוד 208

שאלה 25

נתון המשולש שקודקדיו הם $(1, 2)$, $(-2, -1)$, $(-1, 1)$.
א. מצאו את משוואת המעגל החוסם של המשולש.
ב. מצאו הצגה פרמטרית של תיכוני המשולש.

התשובה בעמוד 209

שאלה 26

נתונה אליפסה מקבילה לצירים שמרכזו בראשית, העוברת דרך הנקודות $(2, 1)$, $(1, \sqrt{2})$.
מצאו את משוואת האליפסה, את אורכה ואת רוחבה.

התשובה בעמוד 210

שאלה 27

נתון משולש $\triangle ABC$ שבו: $A = (0, 0)$, הקודקוד B מונח על הקרן החיובית של ציר ה- x , והקודקוד C נמצא ברביע הראשון ($x \geq 0, y \geq 0$). נתונים אורכי הצלעות:
 $\overline{AB} = 5, \overline{AC} = 6, \overline{BC} = 3$

התשובה בעמוד 211

מצאו את קודקודי המשולש.

שאלה 28

נתונה האליפסה:
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

הוכיחו שנקודות האליפסה ניתנות להצגה באופן הבא:

$$\{(x_0 + a \cos \theta, y_0 + b \sin \theta) \mid \theta \in [0, 2\pi)\}$$

הערה: הצגה זו נקראת **הצגה פרמטרית** של האליפסה.

התשובה בעמוד 212

שאלה 29

בהינתן $A \neq 0$ ו- $B \neq 0$, הוכיחו שהמשוואה
$$\frac{x}{A} + \frac{y}{B} = 1$$

התשובה בעמוד 212

מתארת את הישר העובר דרך הנקודות $(A, 0)$ ו- $(0, B)$.

שיעור 11

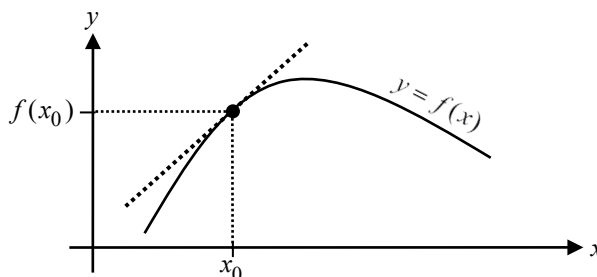
חשבון דיפרנציאלי

החשבון האינפיניטסימלי, אשר פותח בנפרד על ידי סיר אייזיק ניוטון ווילהלם גוטפריד לייבניץ היה אחת המהפכות הגדולות והחשובות שהתרחשו במתמטיקה.

תורה זו נותנת מענה לכמה בעיות מתמטיות יסודיות:

א. חישוב המשיק לעקום

בהינתן פונקציה ממשית f ונקודה x_0 בתחום הגדרתה, נרצה לחשב את הישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $(x_0, f(x_0))$:



בכמה מקרים בעבר ידענו לתת מענה חלקי לבעיה זו. החשבון האינפיניטסימלי נותן לה מענה מלא ושיטתי.

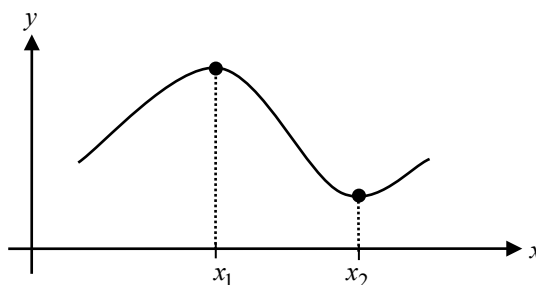
ב. חישוב ערכי מינימום ומקסימום

בהינתן פונקציה f המוגדרת בקטע מסוים, נרצה לדעת –

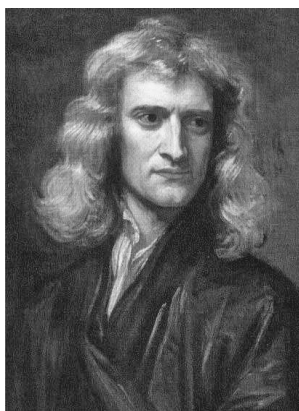
מהו הערך הגדול ביותר שהפונקציה מקבלת בקטע?

מהו הערך הקטן ביותר שהפונקציה מקבלת בקטע?

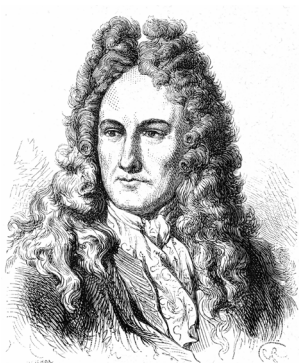
נרצה לדעת גם, מהם ערכי x שעבורם מתקבלים הערך הגדול והקטן ביותר.



לדוגמה, בפונקציה שבאיור לעיל הערך הגדול ביותר מתקבל כאשר $x = x_1$, והערך הקטן ביותר מתקבל כאשר $x = x_2$.



Sir Isaac Newton (1643-1727)



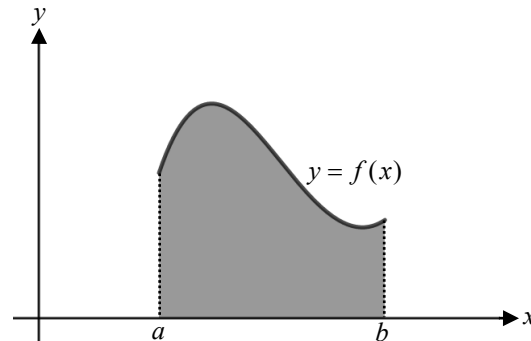
Gottfried Wilhelm Leibnitz

(1646-1716)

Artokoloro / Alamy Stock Photo

ג. חישוב השטח מתחת לגרף הפונקציה

בהינתן פונקציה f המוגדרת בקטע $[a, b]$, נרצה לחשב את השטח שבין גרף הפונקציה, הישרים $x = a$ ו- $x = b$, וציר ה- x .



בשלוש הבעיות שהוצגו לעיל, הפונקציה f היא פונקציה כללית, ולכן גרף הפונקציה יכול להיות בעל צורות רבות ושונות.

בעוד שבעבר מצאנו פתרונות חלקיים לבעיות השטח והמשיק, ואף מצאנו את הערך הקטן ביותר או הגדול ביותר שמקבלת פונקציה ריבועית, החשבון האינפיניטסימלי נותן מענה כללי לבעיות אלה.

אך נחטא לאמת אם נצמצם את הישגיו של החשבון האינפיניטסימלי לשלוש בעיות מסוימות אלה. תורה זו יוצרת שפה המאפשרת לתאר ולחקור מגוון רחב של תופעות מדעיות. דבר זה בולט במיוחד בשטח הפיזיקה, שבו משולב החשבון האינפיניטסימלי כחלק מהשפה הבסיסית: ההגדרות, הבעיות והפתרונות מנוסחים בדרך כלל במושגים אלה.

בשני השיעורים האחרונים של קורס זה נלמד את המושגים הבסיסיים של החשבון האינפיניטסימלי. השיעור הנוכחי מוקדש לחשבון הדיפרנציאלי, שבמסגרתו נפתרות שתי הבעיות הראשונות שתוארו. השיעור הבא מוקדש לחשבון האינטגרלי, שבמסגרתו נפתרת הבעיה השלישית.

בשונה מרוב חלקי הקורס, לא נוכל במסגרת מצומצמת זו להגדיר באופן מלא ומדויק את כל המושגים, וגם לא להוכיח את כל הטענות שבהן נעשה שימוש. אך נציג בקווים כלליים את מושג הגבול ומושג הנגזרת שהם ליבו של החשבון הדיפרנציאלי.

נשתדל להרבות בהסברים ובדוגמאות שיבהירו את המשמעות האינטואיטיבית של מושגים אלה. דיון מלא בהגדרותיהם ובתכונותיהם תוכלו לפגוש בלימודיכם העתידיים בקורס 'חשבון אינפיניטסימלי 1'.

כפי שנראה, למרות שחלק מההגדרות והפיתוחים הם מעבר למסגרת של קורס זה, למושג הנגזרת, לתכונותיו ולשימושיו יש חוקים פשוטים וברורים, שאותם נלמד וניישם. כך נגיע למסקנות מתמטיות חד-משמעיות, ויעלה בידינו להוכיח אי-שוויונות, למצוא ערכי מינימום ומקסימום, למצוא משיקים, ועוד.

הנגזרת – הקדמה

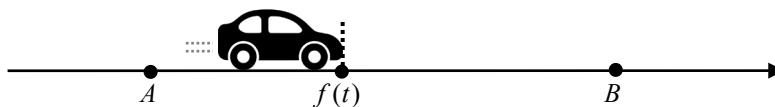
נפתח בהצגה כללית של מושג הנגזרת, מתוך דיון בשתי בעיות שלכאורה אין קשר ביניהן:

א. בעיית המשיק:

כיצד נוכל לחשב את המשיק לגרף הפונקציה f בנקודה x_0 נתונה?

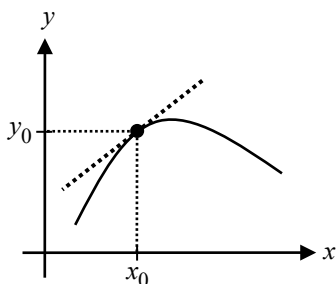
ב. בעיית המהירות:

מכונית נוסעת מנקודה A לנקודה B , על פני קו ישר. למען הפשטות, נמקם את הנקודות A ו- B על ציר המספרים הממשיים. נסמן ב- $f(t)$ את מיקומה של המכונית בזמן t .



בהינתן הפונקציה f , כיצד נוכל לחשב את מהירותה של המכונית ברגע t_0 נתון?

נתבונן, תחילה, בבעיית המשיק.



אנו מחפשים את הישר המשיק לגרף הפונקציה f בנקודה (x_0, y_0) , באשר $y_0 = f(x_0)$. כפי שלמדנו בשיעור הקודם, ישר העובר דרך נקודה נתונה (בהנחה שאינו אנכי) נקבע על פי שיפועו.

אנו מחפשים, אפוא, מספר ממשי a כך שהישר
יהיה משיק לגרף הפונקציה f בנקודה (x_0, y_0) .

ניצבת בפנינו בעיה כפולה: לא רק שאיננו יודעים עדיין כיצד לחשב את שיפוע המשיק, איננו יודעים אפילו מהי **הגדרת** המשיק במקרה זה.

למרבה ההקלה, אנו נפתור (בעזרתם האדיבה של ניוטון ולייבניץ) את שתי הבעיות בעת ובעונה אחת: ההגדרה תאפשר לנו חישוב מעשי, לאחר שתובן כהלכה.

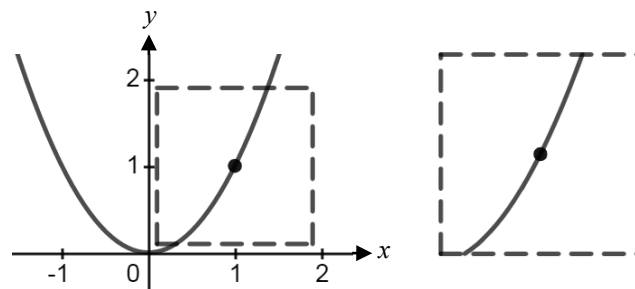
נזכור שישר משיק, בכל הדוגמאות שהכרנו, הוא ישר המבטא את מגמת הקו העקום בנקודת ההשקה.

ככל שמתמקדים באיזור קטן יותר סביב הנקודה הנתונה, ומתבוננים בקו העקום "תחת עדשת המיקרוסקופ" בהגדלה רבה יותר, כך מתקרב מקטע הקו העקום בצורתו לקו ישר.

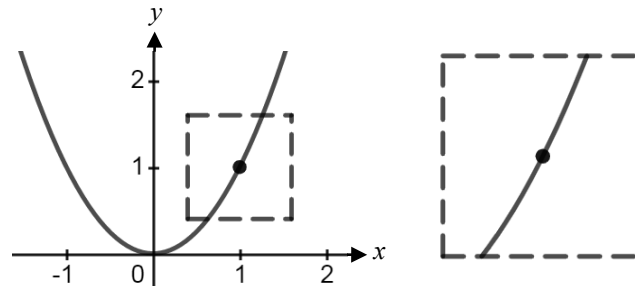
לדוגמה, נתבונן בפונקציה $f(x) = x^2$ ונקודה $x_0 = 1$.

בשיעור הקודם ראינו שהישר $y = 2x - 1$ משיק לפרבולה $y = f(x)$ בנקודה $(1,1)$.

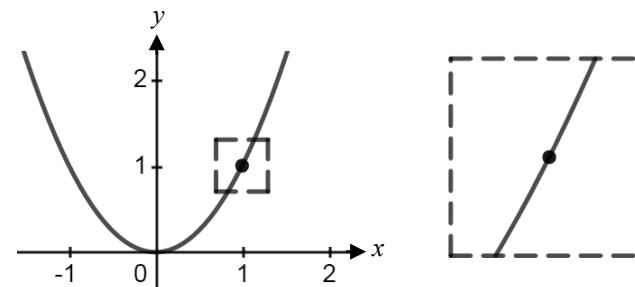
נתבונן בגרף הפונקציה ובתמונה מוגדלת של אזור מסביב לנקודה:



כעת נתמקד באזור קטן יותר, ברמת הגדלה גבוהה יותר:



ושוב:

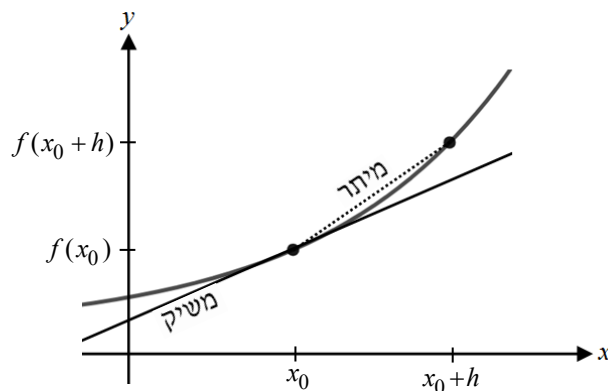


ככל שנוסיף להגדיל, כך תתקרב צורת מקטע הגרף לצורת קו ישר. ישר זה הנו הישר המשיק $y = 2x - 1$.

מתוך התבוננות זו נוכל להגדיר את המשיק לגרף הפונקציה, באופן בלתי פורמלי, כך:
 "המשיק לגרף הפונקציה בנקודה נתונה הינו הקו הישר אליו מתקרבים מקטעי גרף הפונקציה ככל שמתמקדים באיזור קטן יותר סביב הנקודה".

מהגדרה זו נובעת הגדרתו של שיפוע המשיק.

אם נבחר מספר h קרוב ל-0, המספר $x_0 + h$ יהיה קרוב ל- x_0 .



ככל ש- h קטן יותר, כך קרוב גרף הפונקציה f בקטע שבין x_0 ל- $x_0 + h$ לגרף של קו ישר. נתבונן בקטע הישר שבין הנקודות $(x_0, f(x_0))$ ו- $(x_0 + h, f(x_0 + h))$. קטע זה נקרא **מיתר** בגרף הפונקציה f .

שיפוע המיתר מבטא את מגמת המקטע הקטן של גרף הפונקציה בקטע שבין x_0 ל- $x_0 + h$. ככל ש- h יתקרב ל-0, כך יתקרב שיפוע המיתר לשיפוע המשיק לגרף הפונקציה.

לפי נוסחת השיפוע שלמדנו בשיעור הקודם, שיפוע המיתר הוא

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{(x_0 + h) - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

אנו נגדיר את שיפוע המשיק לגרף הפונקציה f בנקודה $(x_0, f(x_0))$ כערך שאליו מתקרב הביטוי $(f(x_0 + h) - f(x_0))/h$, ככל ש- h מתקרב ל-0.

$$a = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \text{ערך זה מסומן כך:}$$

מספר זה נקרא **הנגזרת של הפונקציה f בנקודה x_0** . הנגזרת מסומנת כך: $f'(x_0)$.

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \text{מתקבלת הנוסחה:}$$

בהגדרת הנגזרת נעשה שימוש במושג הגבול (באנגלית – limit , ומכאן הסימון $\lim$). נחזור לדון במושג הגבול בהמשך (בעמוד 86).

עתה נעבור לדוגמה השנייה, והיא בעיית המהירות.

כאמור, אנו מתבוננים בתנועתה של מכונית מנקודה A לנקודה B . שתי הנקודות סומנו על ציר המספרים הממשיים. אנו מסמנים ב- $f(t)$ את מיקומה של המכונית בזמן t נתון.

בכל רגע של הנסיעה, יש למכונית מהירות מסוימת (אותה ניתן לראות במד המהירות שבלוח המחוונים). אך כיצד נוכל להגדיר מהירות זו?

בשיעור 3, במסגרת הלימוד של בעיות תנועה, למדנו את הנוסחה: $v = s/t$, שמשמעותה היא:

$$\text{מהירות} = \frac{\text{דרך}}{\text{זמן}}$$

בנוסחה זו הנחנו שהתנועה היא במהירות קבועה.

כשהתנועה אינה במהירות קבועה, נגדיר:

$$\text{מהירות ממוצעת} = \frac{\text{דרך}}{\text{זמן}}$$

לדוגמה, אם המכונית עברה 10 קילומטרים ב-15 דקות (שהן רבע שעה), נגיע למסקנה שמהירותה הממוצעת היתה

$$\frac{10}{1/4} = 40 \text{ קמ"ש}$$

הדבר אינו אומר שמהירות המכונית היתה 40 קמ"ש בכל רגע של הנסיעה.

כעת נחזור לבעייתנו. נתבונן ברגע מסוים בזמן המוגדר על ידי: $t = t_0$ מהי מהירות המכונית ברגע זה?

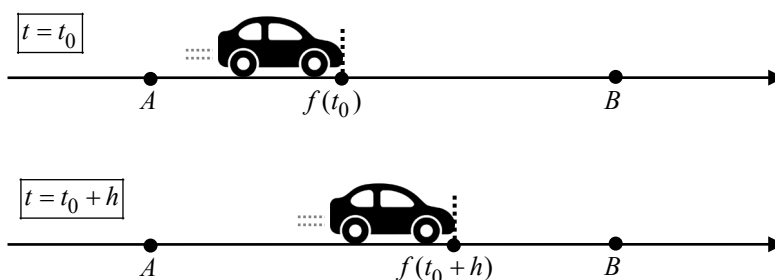
בבעיה זו נתקלת, למשל, המשטרה, הנדרשת למדוד את מהירותן של מכוניות כדי לאכוף את החוק.

מד המהירות המשטרתי בודק את מיקומה של המכונית בהפרשי זמן קטנים, ומחשב על פי מיקומים אלה את המהירות הממוצעת בפרק זמן קצר.

מהירות זו אינה שווה למהירות הרגעית, אך היא מקרבת אותה בצורה משביעת רצון. לדוגמה, אם פרק הזמן הוא מאית השנייה, סביר להניח שמהירות המכונית כמעט ולא השתנתה במהלכו. לכן המהירות הממוצעת בפרק זמן זה מייצגת נאמנה את המהירות הרגעית.

נסמן את משך הזמן שחלף בין שתי מדידות המיקום ב־ h (מספר חיובי), ונתבונן במקטע הזמן $[t_0, t_0 + h]$.

מיקום המכונית ברגע t_0 הוא: $f(t_0)$
מיקום המכונית ברגע $t_0 + h$ הוא: $f(t_0 + h)$



המרחק שעברה המכונית במקטע הזמן $[t_0, t_0 + h]$ הוא: $f(t_0 + h) - f(t_0)$

המהירות הממוצעת של המכונית במקטע זמן זה היא: $\frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}$

באופן דומה, עבור $h < 0$, נתבונן במקטע הזמן $[t_0 + h, t_0]$. במקרה זה המרחק שעברה המכונית הוא $f(t_0) - f(t_0 + h)$, ומשך הזמן הוא $-h$. לכן המהירות הממוצעת במקטע זמן זה היא

$$\frac{f(t_0) - f(t_0 + h)}{-h}$$

נכפיל את המונה והמכנה ב־ -1 , ונקבל את הביטוי שהגענו אליו קודם:

$$(*) \quad \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}$$

קיבלנו שעבור $h \neq 0$, חיובי או שלילי, הביטוי $(*)$ מייצג את המהירות הממוצעת של המכונית במקטע זמן שאורכו $|h|$ המתחיל או מסתיים בזמן t_0 .

ככל שהמספר h יקטן, כך נתמקד בפרקי זמן קצרים יותר, והביטוי $(*)$ ייצג נאמנה יותר את המהירות הרגעית של המכונית בזמן t_0 . לכן המהירות בזמן t_0 היא הערך שאליו שואף הביטוי $(*)$:

$$v = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}$$

כעת נשוב להתבונן בנוסחה לשיפוע המשיק:

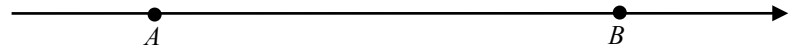
$$a = f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

ביטוי זה זהה לביטוי שבנוסחת המהירות הרגעית.

המהירות הרגעית היא, אפוא, **הנגזרת** של פונקציית המיקום $f(t)$ בנקודה t_0 :
 $v = f'(t_0)$

הגדרת המהירות כנגזרת מאפשרת לראות אותה כמספר ממשי, היכול להיות חיובי, 0, או שלילי. סימן הנגזרת, ובעקבותיו סימן המהירות, קובעים את **מגמת התנועה**.

בדוגמה שניתחנו, תנועת המכונית היתה מהנקודה A לנקודה B , שסומנו כך על ציר המספרים:



מסימון זה עולה כי $A < B$. יתרה מכך, סביר להניח שבמהלך הנסיעה שמרה המכונית על הכיוון מ- A ל- B ולא חזרה לאחור. לכן אם $t_1 < t_2$ אז מיקומה של המכונית בזמן t_2 הוא קרוב יותר ל- B מאשר מיקומה בזמן המוקדם יותר t_1 . כלומר:

$$t_1 < t_2 \Rightarrow f(t_1) < f(t_2)$$

הפונקציה f היא, אם כך, **פונקציה עולה**.

עתה נניח שנסיעת המכונית היתה בכיוון ההפוך, מ- B ל- A . במקרה זה, אם $t_1 < t_2$ אז מיקומה של המכונית בזמן t_2 קרוב יותר ל- A מאשר בזמן המוקדם יותר t_1 , ולכן $f(t_2) < f(t_1)$. לכן f היא **פונקציה יורדת**.

במקרה זה, עבור $h > 0$ יתקיים:

$$f(t_0) > f(t_0 + h)$$

$$f(t_0 + h) - f(t_0) < 0$$

$$\frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} < 0$$

$$f(t_0) < f(t_0 + h)$$

$$f(t_0 + h) - f(t_0) > 0$$

$$\frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} < 0$$

ועבור $h < 0$ יתקיים

לכן

ולפי חוקי הסימנים, נקבל שוב

הביטוי $(f(t_0 + h) - f(t_0))/h$, המבטא את המהירות הממוצעת של המכונית בפרק זמן המתחיל או מסתיים בזמן t_0 , הנו בעל סימן המבטא את מגמת התנועה. אם ביטוי זה הוא חיובי, מגמת התנועה היא הכיוון החיובי של ציר המספרים; אם הוא שלילי, מגמתה הוא הכיוון השלילי.

$$v = f'(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}$$

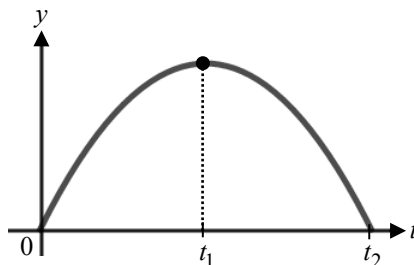
בהתאם לכך, המהירות הרגעית היא בעלת סימן המבטא את מגמת התנועה. כשכיוון התנועה הוא מ- B ל- A , המהירות הרגעית תהיה שלילית.

מגמת התנועה יכולה להתחלף במהלך התנועה.

למשל, אם נתבונן בכדור הנזרק כלפי מעלה, ונסמן:

$$f(t) = t \text{ גובה הכדור בזמן } t$$

גרף פונקציית המיקום $f(t)$ ייראה כך:



עד לרגע מסוים, שיסומן ב- t_1 , הכדור נע כלפי מעלה. ברגע t_1 עצמו, הכדור נמצא בשיא הרום ביחס לקרקע; ברגע זה נדמה כי הכדור פסק מלנוע. לאחר מכן הכדור מתחיל בנפילה עד לרגע t_2 שבו הכדור חזר לנקודת ההתחלה.

בהתאם לכך, מהירות הכדור בזמן t , השווה לנגזרת $f'(t)$, היא חיובית עבור $0 < t < t_1$, מתאפסת עבור $t = t_1$, ושלילית עבור $t_1 < t < t_2$. סימן הנגזרת מבטא את מגמת התנועה.

לסיכום הדיון, ראינו שתי דוגמאות חשובות: אחת היא הגדרה וחישוב של שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה נתונה; השנייה היא חישוב המהירות של גוף נע לאורך קו ישר בהינתן פונקציית המיקום שלו.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

ראינו ששתי הבעיות מובילות לאותו הביטוי:

ביטוי זה נקרא **נגזרת הפונקציה f בנקודה x_0** , ומסומן $f'(x_0)$.

לנגזרת $f'(x_0)$ יש משמעויות נוספות רבות, בהתאם למשמעות הפונקציה f .

לדוגמה, אם $f(t)$ מציין את הטמפרטורה (ביחידות של מעלות צלזיוס) במקום מסוים בזמן t (הנמדד בשעות), הנגזרת $f'(t_0)$ בזמן t_0 מייצגת את קצב עליית (או ירידת) הטמפרטורה באותו הרגע, ביחידות של מעלות לשעה. אם $f'(t_0) > 0$ הטמפרטורה נמצאת במגמת התחממות; אם $f'(t_0) < 0$ הטמפרטורה היא במגמת התקררות.

באופן כללי, המספר $f'(x_0)$ מייצג את **קצב השינוי הרגעי של הפונקציה f בנקודה x_0** .

מעט על מושג הגבול

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \text{הגדרת הנגזרת נסמכת על מושג הגבול:}$$

בגבול זה, הביטוי שבאגף ימין הוא פונקציה של המשתנה h .

הגדרתו המדויקת של מושג הגבול חורגת ממסגרת קורס זה, אך כדי להבין את משמעותו נדון בו ונתבונן בכמה דוגמאות.

בהינתן פונקציה f המוגדרת בסביבתה של נקודה x_0 (אך לא בהכרח בנקודה x_0 עצמה), הביטוי:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

מייצג את הערך המספרי שאליו מתקרבים ערכי הפונקציה f , ככל ש- x מתקרב ל- x_0 .
ערך זה נקרא **גבול הפונקציה f בנקודה x_0** .

אם אין ערך יחיד שאליו מתקרבים ערכי הפונקציה f ככל ש- x מתקרב ל- x_0 , נאמר שהגבול $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ **לא קיים**.

חשוב להבהיר שאין קשר בין גבול הפונקציה בנקודה, לערכה בנקודה. שני מספרים אלה יכולים להיות שווים, או שונים, וייתכן גם שאחד מהם, או שניהם, לא יהיו מוגדרים.

נבהיר את הדברים על ידי דוגמאות:

$$\lim_{x \rightarrow 2} 3x + 1$$

א. נתבונן בגבול

$$f(x) = 3x + 1$$

במקרה זה אנו מתבוננים בפונקציה

בסביבת הנקודה $x_0 = 2$.

ככל ש- x מתקרב ל-2, יתקרב הערך $f(x) = 3x + 1$ לערך $f(2) = 3 \cdot 2 + 1 = 7$, ולכן

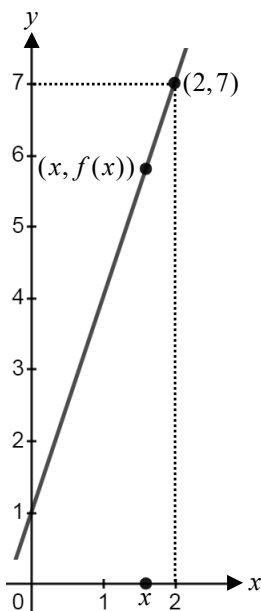
$$\lim_{x \rightarrow 2} 3x + 1 = 7$$

כדי להיווכח בכך, נתבונן במספר ערכי x ההולכים ומתקרבים ל-2, ובערכי הביטוי $3x + 1$ עבורם:

x	3	2.5	2.1	2.01	1.9	1.95	1.99
$3x + 1$	10	8.5	7.3	7.03	6.7	6.85	6.97

אנו רואים שאכן, ככל ש- x מתקרב ל-2, כך מתקרב $f(x) = 3x + 1$ ל-7.

ניתן לראות זאת גם בגרף הפונקציה משמאל: ככל שערכי x קרובים ל-2, כך קרובה הנקודה $(x, f(x))$ לנקודה $(2, 7)$, ובפרט קרוב הערך $f(x)$ ל-7.



ב. נתבונן בגבול $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

במקרה זה אנו מתבוננים בפונקציה $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

ובנקודה $x_0 = 2$. נשים לב שהפונקציה f אינה מוגדרת בנקודה x_0 .

יתרה מכך, פונקציה זו היא מנה של שני ביטויים, שכל אחד מהם מתאפס בנקודה x_0 .

נתבונן בסדרת ערכים ההולכים ומתקרבים ל-2:

x	המונה $x^2 - 4$	המכנה $x - 2$	המנה $\frac{x^2 - 4}{x - 2}$
3	5	1	5
2.5	2.5	0.5	4.5
2.1	0.41	0.1	4.1
2.01	0.0401	0.01	4.01

ניתן לראות שכל אחד מהביטויים $x - 2$, $x^2 - 4$ הולך ומתקרב ל-0, אך היחס ביניהם הולך ומתקרב ל-4. הגבול הוא אפוא:

$$(*) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$$

גבול של מנה, שבה המונה והמכנה שואפים ל-0, נקרא גבול מהצורה "0/0". לגבולות אלה יש חשיבות מיוחדת בחשבון הדיפרנציאלי, כי הנגזרת עצמה היא גבול מסוג זה:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

במרבית הפונקציות f שבהן ניתקל, ככל ש- h יתקרב לאפס, יתקרב הביטוי $f(x_0 + h) - f(x_0)$ ל- $f(x_0)$, ולכן המונה $f(x_0 + h) - f(x_0)$ יתקרב ל-0. המכנה, h , שואף לאפס לפי ההנחה.

כדי להבין טוב יותר מדוע מתקיים השוויון (*), ניעזר בנוסחאות הכפל המקוצר. לכל $x \neq 2$ מתקיים:

$$\frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x + 2)(x - 2)}{x - 2} = x + 2$$

הביטוי שאת גבולו אנו מחשבים שווה לפונקציה הליניארית $g(x) = x + 2$. שוויון זה מתקיים, אמנם, רק עבור $x \neq 2$, אך הגבול $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ כלל אינו תלוי בערך הפונקציה f בנקודה עצמה; הגבול הנו המספר שאליו מתקרבים ערכי הפונקציה ככל ש- x מתקרב ל- x_0 .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$$

ג. נתבונן בגבול

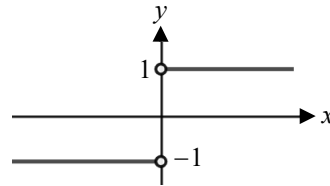
גם גבול זה הוא מהצורה "0/0".

הפונקציה שאת גבולה אנו מעוניינים לחשב ניתנת להצגה כך:

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} \frac{x}{x} & x > 0 \\ -\frac{x}{x} & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

פונקציה זו אינה מוגדרת בנקודה 0.

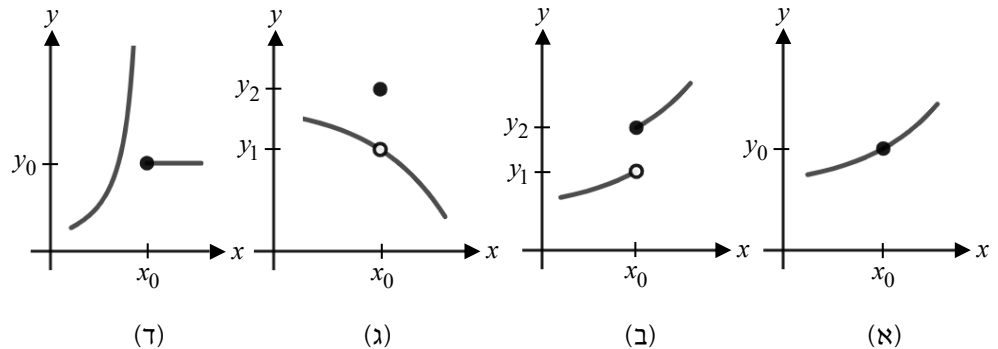
גרף הפונקציה נראה כך:



במקרה זה, הגבול **לא קיים**, כי עבור ערכי x חיוביים (קטנים ככל שיהיו) ערך הפונקציה הוא 1, ועבור ערכי x שליליים (קרובים ל-0 ככל שיהיו) ערך הפונקציה הוא -1, ולכן אין ערך יחיד שאליו מתקרבים ערכי הפונקציה ככל ש- x מתקרב ל-0.

שאלה 1

לגבי כל אחד מהגרפים הבאים, נסו לקבוע אם הגבול $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ קיים עבור הפונקציה f והנקודה x_0 המוצגים בגרף, ואם כן – מהו ערכו של הגבול.



התשובה בעמוד 213

מושג הפונקציה הנגזרת

נחזור לנושא העיקרי של שיעור זה – הנגזרת.

עבור פונקציה $f(x)$ ונקודה x_0 בתחום הגדרתה, הגדרנו:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

גודל זה מבטא את שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה x_0 , וגם את קצב השינוי הרגעי של הפונקציה בנקודה זו.

במקרה שגבול זה קיים, נאמר ש- f היא **גזירה** בנקודה x_0 . הגודל $f'(x_0)$ נקרא **נגזרת הפונקציה f בנקודה x_0** .

כעת, נוכל להתבונן על הנגזרת כפונקציה של x : בכל נקודה x שבה f גזירה, מוגדר ערך הנגזרת $f'(x)$. בדרך זו מתקבלת פונקציה חדשה: פונקציית הנגזרת f' . תחום הגדרתה הוא

$$\{x \mid x \text{ גזירה בנקודה } x\}$$

בכל נקודה x , הערך $f'(x)$ הוא תוצר של חישוב גבול ביחס למשתנה h השואף לאפס:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

פעולת הגזירה, המתאימה לפונקציה f את נגזרתה f' היא אפוא **פעולה על פונקציות**.

עתה נעבור ללמוד את חוקי הגזירה. הם יאפשרו לנו לחשב בפועל את נגזרותיהן של פונקציות שונות, ולהסיק מסקנות לגביהן.

נגזרת של פונקציה לינארית

נפתח את מסענו לחישוב נגזרות של פונקציות שונות, בפונקציות פשוטות במיוחד: הפונקציות הלינאריות.

טענה 11.1

$f(x) = ax + b$	תהי f פונקציה לינארית:
$f'(x) = a$	הנגזרת של f בכל נקודה היא:

בפרט, נסיק מטענה זו שהנגזרת של פונקציה לינארית היא קבועה ואינה תלויה ב- x .

◁ הוכחה בלתי פורמלית, שכן לא הגדרנו את מושג הגבול במדויק.

הוכחת הטענה

עבור הפונקציה הנתונה, לכל x ולכל h מתקיים

$$f(x+h) = a(x+h) + b = ax + ah + b \quad ; \quad f(x) = ax + b$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(ax + ah + b) - (ax + b)}{h} = \frac{ah}{h} = a \quad : h \neq 0$$

ביטוי זה שווה ל- a ללא תלות ב- h , ולכן גם ערכו הגבולי הוא a :

$$\square \quad f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = a$$

מהטענה נקבל, למשל, שאם $f(x) = 2x + 7$ אז $f'(x) = 2$ לכל x .

באופן מקוצר, נרשום מסקנה זו כך:

$$(2x + 7)' = 2$$

רישום מקוצר זה מסתיר חלק מהפרטים שמעורבים בתהליך הגזירה: את העובדה שמדובר בפונקציה $f(x) = 2x + 7$, שלגביה בוצע חישוב של הגבול המגדיר את הנגזרת בכל נקודה x . כשמשתמשים בצורת רישום זו, חשוב לזכור ולהבין את המשמעות שמאחוריה.

מטענה 11.1 נסיק, בפרט:

מסקנה 11.2

הנגזרת של כל פונקציה קבועה היא 0.

ואכן, אם $f(x) = c$ לכל x ממשי, עבור מספר קבוע c , אז $f(x) = 0 \cdot x + c$, ולכן f היא פונקציה לינארית בעלת שיפוע $a = 0$. מהטענה הקודמת נקבל ש- $f'(x) = 0$ לכל x .

שאלה 2

א. גזרו את הפונקציה $f(x) = 8x - 4$.

ב. גזרו את הפונקציה $f(x) = x$.

ג. חשבו את $(-x)'$.

ד. חשבו את $(3)'$.

התשובה בעמוד 213

נגזרת הפונקציה $f(x) = x^2$

הפונקציה ה"מעניינת" הראשונה שנגזור היא הפונקציה $f(x) = x^2$. נגזרתה נתונה בטענה הבאה:

טענה 11.3

נגזרת הפונקציה $f(x) = x^2$ היא $f'(x) = 2x$.

הוכחה

לכל x ולכל h מתקיים:

$$f(x + h) = (x + h)^2 = x^2 + 2hx + h^2$$

$$f(x) = x^2$$

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \frac{2hx + h^2}{h} = 2x + h$$

ולכן, לכל $h \neq 0$:

ככל ש- h מתקרב ל-0, מתקרב ערכו של ביטוי זה ל- $2x$. לכן

$$\square \quad f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = 2x$$

נבחן את משמעותה של תוצאה זו:

לכל פונקציה f , הגזירה בנקודה x_0 , שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה x_0 הוא הנגזרת $f'(x_0)$.

עתה הוכחנו שעבור הפונקציה $f(x) = x^2$, שיפוע זה שווה ל- $2x_0$.

לדוגמה, עבור $x_0 = 1$, שיפוע המשיק לגרף הפונקציה הוא $2 \cdot 1 = 2$, וזאת בהתאם למה שמצאנו בעבר, שמשוואת הישר המשיק היא $y = 2x - 1$.

בעזרת הנגזרת שחושבה, נוכל למצוא ללא קושי את משוואת המשיק לפרבולה $y = x^2$ בכל נקודה.

לדוגמה, עבור $x_0 = 1/2$, שיפוע המשיק בנקודה $(x_0, f(x_0)) = (1/2, 1/4)$ הוא

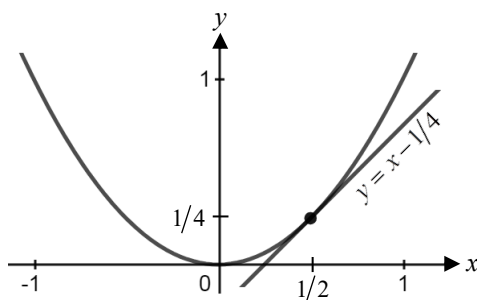
$$2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

משוואת המשיק, לפי הנקודה $(1/2, 1/4)$ שעליו, והשיפוע 1, היא

$$y = 1 \left(x - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{4}$$

$$y = x - \frac{1}{4}$$

כלומר:



עוד נשים לב, כי הפונקציה $f(x) = x^2$ יורדת בקטע $(-\infty, 0]$ ועולה בקטע $[0, \infty)$, ושיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה x_0 , השווה ל- $2x_0$, הוא שלילי כש- x_0 שלילי, חיובי כש- x_0 חיובי, ומתאפס עבור $x_0 = 0$ (נקודת המעבר בין תחום העלייה לתחום הירידה). כפי שנאמר בהקדמה, סימן הנגזרת מבטא את מגמת הפונקציה בנקודה; ודוגמה זו ממחישה זאת. בהמשך נעשה שימוש רב בסימן הנגזרת לניתוח תחומי העלייה והירידה של פונקציות.

שאלה 3

נתונה הפונקציה $f(x) = x^2$.

א. מצאו את נגזרת הפונקציה בנקודה $x = -1$.

ב. חשבו את הישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $(-1, 1)$.

ג. מצאו את המשיק לגרף הפונקציה המקביל לישר $y = 3x - 2$, ואת נקודת ההשקה.

התשובה בעמוד 214

נגזרת של סכום, הפרש, ומכפלה בקבוע

בהינתן פונקציות ממשיות f ו- g , הגדרנו בעבר את פונקציית הסכום $f + g$ ואת פונקציית ההפרש $f - g$, כך:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

בנוסף, בהינתן מספר קבוע c , ניתן להכפיל את הפונקציה f ב- c ולקבל את הפונקציה

$$(cf)(x) = c \cdot f(x)$$

הכללים המובאים בטענות הבאות מאפשרים לחשב את הנגזרות של פונקציות אלה בנקודה שבה הפונקציות המקוריות גזירות.

טענה 11.4 (כללי נגזרת הסכום וההפרש)

אם f ו- g הן שתי פונקציות גזירות בנקודה x_0 אז:

א. $f + g$ גם היא גזירה ב- x_0 , ומתקיים $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

ב. $f - g$ גם היא גזירה ב- x_0 , ומתקיים $(f - g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$.

בקצרה, נוכל לבטא כללים אלה כך:

נגזרת הסכום שווה לסכום הנגזרות, ונגזרת ההפרש שווה להפרש הנגזרות.

לא נוכיח את הכללים האלה. נדגים את השימוש בהם:

תהינה $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x$

נתבונן בפונקציית הסכום $h = f + g$:

לפי הטענה, נגזרתה היא

$$h(x) = x^2 + 2x$$

$$h'(x) = f'(x) + g'(x)$$

לפי הטענות הקודמות, מתקיים:

$$f'(x) = 2x, \quad g'(x) = 2$$

לכן:

$$h'(x) = 2x + 2$$

באופן מקוצר נוכל לבטא את החישוב שביצענו כך:

$$(x^2 + 2x)' = (x^2)' + (2x)' = 2x + 2$$

עתה נתבונן בפונקציית ההפרש, $k = f - g$:

$$k(x) = f(x) - g(x) = x^2 - 2x$$

נגזרתה היא

$$k'(x) = f'(x) - g'(x) = 2x - 2$$

בכתיב מקוצר:

$$(x^2 - 2x)' = (x^2)' - (2x)' = 2x - 2$$

נעבור למכפלה של פונקציה בקבוע, cf :

טענה 11.5

אם f גזירה בנקודה x_0 ו- c מספר ממשי אז cf גזירה ב- x_0 ומתקיים:

$$(cf)'(x_0) = c \cdot f'(x_0)$$

לא נוכיח טענה זו, אף שהוכחתה אינה קשה. ניתן להיווכח בנכונותה גם משיקולים גיאומטריים: למען הפשטות, נניח $c > 1$. כפי שראינו בשיעור 6, גרף הפונקציה cf מתקבל כמתיחה של גרף הפונקציה f ביחס של $c:1$ במקביל לציר ה- y . המשיק לגרף הפונקציה נמתח באותו היחס, ולכן שיפועו גדל פי c .

נדגים את השימוש בטענה:

תהי $f(x) = x^2$ ותהי $g = 3f$, כלומר:

$$g(x) = 3x^2$$

לפי הטענה מתקיים

$$g'(x) = 3f'(x) = 3 \cdot 2x = 6x$$

בכתיב מקוצר:

$$(3x^2)' = 3(x^2)' = 3 \cdot 2x = 6x$$

הטענות האחרונות מאפשרות לגזור כל פונקציה ריבועית:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

לדוגמה, נתבונן בפונקציה $f(x) = 5x^2 - 6x + 1$.

נבטא אותה כסכום $f(x) = 5x^2 + (-6x + 1)$; נגזור את הפונקציה $g(x) = 5x^2$ כמכפלה של הפונקציה $h(x) = x^2$ בקבוע 5, ואת הפונקציה $k(x) = -6x + 1$ כפונקציה לינארית. בסך הכול נקבל:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (5x^2)' + (-6x + 1)' \\ &= 5(x^2)' + ((-6)x + 1)' = 5 \cdot (2x) + (-6) = 10x - 6 \end{aligned}$$

נסו את כוחכם בגזירת הפונקציות שבשאלה הבאה:

שאלה 4

- גזרו את הפונקציה $f(x) = 2x^2 + 3x$.
- גזרו את הפונקציה $f(x) = 3x + 1 - x^2$.
- גזרו את הפונקציה $f(x) = (x + 2)(x - 3)$.
- מצאו את המשיק לפרבולה $y = 5x^2 - x$ בנקודה $(1, 4)$.

התשובה בעמוד 214

כלל הגזירה של סכום של שתי פונקציות תקף גם לסכום של מספר גדול יותר של פונקציות. כלל זה מנוסח באופן פורמלי בטענה הבאה:

טענה 11.6

תהיינה $f_1, f_2, \dots, f_n$ פונקציות (עבור n מספר טבעי כלשהו). נתבונן בפונקציית הסכום:

$$S(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)$$

אם כל הפונקציות $f_1, f_2, \dots, f_n$ גזירות בנקודה x_0 אז גם פונקציית הסכום גזירה בנקודה זו, ומתקיים:

$$S'(x_0) = \sum_{i=1}^n f'_i(x_0) = f'_1(x_0) + \dots + f'_n(x_0)$$

הוכחתה של טענה זו היא בשיטת האינדוקציה, בהסתמך על כלל הגזירה של סכום שתי פונקציות, שבטענה 11.4.

◁ ראו שאלה 34 ב'שאלות להערכה עצמית'.

בהסתמך על טענה זו, נוכל לגזור כל פונקציה המבוטאת כסכום 'מחובר-מחובר', ולסכם את התוצאות. לדוגמה, אם

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 3$$

$$f'(x) = (2x^2)' + (-4x)' + (3)' = 2 \cdot (x^2)' + (-4) + 0 = 4x - 4 \quad \text{אז}$$

◁ לפי מסקנה 11.2 $(3)' = 0$ (הנגזרת של פונקציה קבועה היא 0).

נגזרת של פולינום

נעבור לגזירתם של ביטויים ממעלה גבוהה מ-2, דוגמת הביטוי:

$$f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x + 1$$

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad \text{כללית, פונקציה מהצורה}$$

עבור $a_0, a_1, \dots, a_n$ מספרים ממשיים קבועים, נקראת **פולינום**.

המספרים $a_0, a_1, \dots, a_n$ נקראים **מקדמי הפולינום**. בהנחה ש- $a_n \neq 0$, המספר n נקרא **מעלת הפולינום**, ומסומן כך: $n = \deg p$.

הפונקציה $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x + 1$ היא, אפוא, פולינום ממעלה 4. מקדמי הפולינום הם:

$$a_4 = 1, a_3 = -3, a_2 = 0, a_1 = 2, a_0 = 1$$

כדי לגזור פולינומים, נדרשת היכולת לגזור פונקציות מהצורה $f(x) = x^n$, עבור n טבעי כלשהו. הנוסחה לגזירתן מופיעה בטענה הבאה:

טענה 11.7

$$f'(x) = nx^{n-1} \quad \text{יהי } n \text{ מספר טבעי, ותהי } f(x) = x^n \text{ אז}$$

טענה זו תוכח בהמשך (ראו שאלה 11).

נוכחנו בנכונותה של הנוסחה שבטענה זו עבור $n = 1, 2$:

$$\text{עבור } n = 1, f(x) = x \text{ ואכן } (x)' = 1 = 1 \cdot x^0$$

$$\text{עבור } n = 2, f(x) = x^2 \text{ ואכן } (x^2)' = 2x = 2 \cdot x^1$$

$$\text{עבור } n = 3, \text{ נקבל מנוסחה זו: } (x^3)' = 3x^2$$

$$\text{עבור } n = 4 \text{ נקבל: } (x^4)' = 4x^3$$

וכן הלאה.

כעת נוכל לגזור כל פולינום. לדוגמה, עבור

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1 \quad \text{נקבל:}$$

$$f'(x) = (x^3)' + ((-3)x^2)' + (2x)' + (1)'$$

$$= (x^3)' + (-3)(x^2)' + 2(x)' + 0$$

$$= 3x^2 - 3(2x) + 2 \cdot 1 = 3x^2 - 6x + 2$$

שאלה 5

גזרו את הפולינומים הבאים:

א. $p(x) = 3x^4 - x^3 + 2x + 3$

ב. $p(x) = x^5 + x^4 - 5x^2 + \sqrt{2} \cdot x$

ג. $p(x) = x^2 - 2x^3 + \frac{x^{20}}{4}$

ד. $p(x) = (2x + 1)(3x^2 + 4x - 2)$

ה. $p(x) = (x + 1)^3$

התשובה בעמוד 215

שאלה 6

מצאו את המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = x^3 - 8x^2 + 3$ בנקודה $(2, -21)$.

התשובה בעמוד 215

שאלה 7

מצאו נוסחה כללית לנגזרת הפולינום $p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$.

התשובה בעמוד 215

נגזרת של מכפלה

בהינתן פונקציות ממשיות f ו- g , פונקציית המכפלה fg מוגדרת כך:

$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

לאור ניסיוננו עם כללי הגזירה של סכום והפרש שתי פונקציות, ניתן היה אולי לשער

שהנגזרת של מכפלת פונקציות שווה למכפלת נגזרותיהן. אך השערה זו אינה נכונה. לדוגמה,

אנו יודעים כי נגזרת הפונקציה $f(x) = x$ היא 1, ונגזרת הפונקציה $g(x) = x^2$ היא $2x$.

לכן הנגזרת של $f \cdot f$ אינה $f' \cdot f'$.

הכלל הנכון לגזירת מכפלת פונקציות נתון בטענה הבאה:

טענה 11.8 (כלל נגזרת המכפלה)

אם f ו- g הן שתי פונקציות גזירות בנקודה x_0 אז הפונקציה fg גזירה בנקודה x_0 ומתקיים:

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

לא נוכיח את הטענה.

שימו לב שבשונה מהכללים שהכרנו בעבר, הנוסחה לנגזרת המכפלה fg בנקודה x_0 כוללת את ערכי הנגזרות של f ו- g בנקודה x_0 , וגם את ערכי הפונקציות עצמן בנקודה זו.

נוכל לכתוב את כלל הגזירה בצורה מקוצרת כך:

$$(fg)' = f'g + fg'$$

נדגים את השימוש בכלל גזירה זה, עבור המכפלה

$$f(x) = (x+1)(x^2+1)$$

נסמן:

$$g_1(x) = x+1, \quad g_2(x) = x^2+1$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (g_1 g_2)'(x) = g_1'(x)g_2(x) + g_1(x)g_2'(x) \\ &= 1 \cdot (x^2+1) + (x+1) \cdot (2x) \\ &= x^2+1+2x^2+2x = 3x^2+2x+1 \end{aligned}$$

באופן מקוצר, ניתן לכתוב חישוב זה כך:

$$\begin{aligned} ((x+1)(x^2+1))' &= (x+1)'(x^2+1) + (x+1)(x^2+1)' \\ &= 1 \cdot (x^2+1) + (x+1)(2x) \\ &= x^2+1+2x^2+2x = 3x^2+2x+1 \end{aligned}$$

במקרה זה נוכל לחשב את הנגזרת בדרך נוספת. נפתח סוגריים בהגדרת הפונקציה f :

$$f(x) = (x+1)(x^2+1) = x^3 + x^2 + x + 1$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2x + 1$$

נגזור כפולינום:

ואכן קיבלנו את אותה תוצאה.

נתרגל את השימוש בכלל נגזרת המכפלה:

שאלה 8

גזרו כל אחת מהפונקציות בעזרת כלל נגזרת המכפלה, ובחישוב ישיר; ודאו שקיבלתם תוצאות זהות.

ב. $f(x) = (x^3 - 1)(2x^2 + 1)$

א. $f(x) = (2x + 1)(3x - 2)$

ד. $f(x) = x^3 \cdot x^5$

ג. $f(x) = (x^2 + 1)^2$

שאלה 9

תהי f פונקציה המקיימת: $f(3) = 5$, $f'(3) = 0$.

א. נגדיר: $g(x) = x^2 f(x)$. חשבו את $g'(3)$.

ב. נגדיר: $h(x) = x(f(x) - 1)$. חשבו את $h'(3)$.

התשובה בעמוד 217

שאלה 10

תהי f פונקציה גזירה בנקודה x_0 . הוכיחו שהפונקציה $f^2 = f \cdot f$ גזירה בנקודה x_0 ,

$$(f^2)'(x_0) = 2f(x_0)f'(x_0)$$

ומתקיים:

התשובה בעמוד 217

שאלה 11

א. הוכיחו, בעזרת כלל נגזרת המכפלה: $(x^3)' = 3x^2$.

ב. הוכיחו את טענה 11.7 (נוסחת הגזירה של $f(x) = x^n$).

הדרכה: הוכיחו באינדוקציה; היעזרו בכלל נגזרת המכפלה.

התשובה בעמוד 217

נגזרת של מנה

בהמשך מסענו להכרת כללי הגזירה, נלמד כיצד לגזור מנת פונקציות, ולדוגמה, את הפונקציה הבאה:

$$f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

נזכיר שבהינתן פונקציות ממשיות f ו- g , פונקציית המנה f/g מוגדרת כך:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

תחום ההגדרה של פונקציה זו הוא כל ערכי x שעבורם $f(x), g(x)$ מוגדרים, ו- $g(x) \neq 0$.

נגזרת המנה מחושבת לפי הכלל שבטענה הבאה:

טענה 11.9 (כלל נגזרת המנה)

אם f ו- g הן שתי פונקציות גזירות בנקודה x_0 , ו- $g(x_0) \neq 0$ אז הפונקציה f/g גזירה

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

בנקודה x_0 ומתקיים:

לא נוכיח את הטענה.

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

בצורה מקוצרת, כלל נגזרת המנה מנוסח כך:

נדגים את השימוש בכלל:

א. נגזור את הפונקציה $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$

נבטא $f = g_1/g_2$, עם הפונקציות: $g_1(x) = 2x$, $g_2(x) = x^2 + 1$

נקבל: $f'(x) = \frac{g_1'(x)g_2(x) - g_1(x)g_2'(x)}{g_2(x)^2}$

$$= \frac{2(x^2 + 1) - 2x \cdot (2x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x^2 + 2 - 4x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

באופן מקוצר, נוכל להציג את חלקו הראשון של החישוב כך:

$$\left(\frac{2x}{x^2 + 1} \right)' = \frac{(2x)'(x^2 + 1) - 2x(x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2(x^2 + 1) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2}$$

ב. נגזור את הפונקציה $f(x) = \frac{1}{1-x}$

הפעם נכתוב מראש בכתיב המקוצר:

$$f'(x) = \left(\frac{1}{1-x} \right)' = \frac{(1)'(1-x) - 1 \cdot (1-x)'}{(1-x)^2} = \frac{0 \cdot (1-x) - 1 \cdot (-1)}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{1}{(1-x)^2}$$

נתרגל:

שאלה 12

גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ ב. $g(x) = \frac{5}{x}$

ג. $h(x) = \frac{x}{x^2 + 1} + \frac{x+1}{x+2}$ ד. $k(x) = \frac{x^5}{x^6 - 1}$

התשובה בעמוד 218

שאלה 13

מצאו את הישר המשיק להיפרבולה $y = \frac{1}{x}$ בנקודה $(2, 1/2)$.

התשובה בעמוד 218

שאלה 14

תהי f פונקציה גזירה בנקודה x_0 , המקיימת: $f(x_0) \neq 0$.

נגדיר: $g(x) = 1/f(x)$. הוכיחו: $g'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{f(x_0)^2}$

התשובה בעמוד 219

חזקות שלמות שליליות

עבור m טבעי ו- $x \neq 0$ הגדרנו בשיעורים 1 ו-2:

$$x^{-m} = \frac{1}{x^m}$$

לדוגמה, $x^{-1} = \frac{1}{x}$, $x^{-2} = \frac{1}{x^2}$

טבעי לשאול אם ניתן לגזור ביטויים אלה לפי הכלל המוכר, $(x^n)' = nx^{n-1}$.
התשובה לשאלה זו היא חיובית:

טענה 11.10

לכל $n < 0$ שלם, ולכל $x_0 \neq 0$, הפונקציה $f(x) = x^n$ גזירה בנקודה x_0 , ומקיימת:

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

הוכחה

נגדיר: $n = -m$. m הוא מספר טבעי, ומתקיים: $n = -m$.

נציג את הפונקציה f כך: $f(x) = x^n = x^{-m} = \frac{1}{x^m}$

נגזור את f לפי כלל נגזרת המנה: $f'(x) = \frac{(1)' \cdot x^m - 1 \cdot (x^m)'}{(x^m)^2}$

לפי טענה 11.7, וחוקי החזקות:

$$\square \quad = \frac{0 \cdot x^m - m x^{m-1}}{x^{2m}} = -m x^{m-1-2m} = -m x^{-1-m} = n x^{n-1}$$

בעזרת טענה זו נגזור ביתר קלות:

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = (-1)x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$$

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)' = (x^{-2})' = -2x^{-3} = \frac{-2}{x^3}$$

וכן הלאה.

חזקות ממשיות ושורשים

עתה נתבונן בפונקציה $f(x) = x^r$ עבור r ממשי כלשהו.

בשיעור 7 הגדרנו פונקציה זו עבור $x > 0$.

לפונקציה זו היתה משמעות מיוחדת עבור r רציונלי. למשל:

$$x^{1/2} = \sqrt{x}$$

$$x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$$

$$x^{m/n} = (\sqrt[n]{x})^m$$

ובאופן כללי:

כלל הגזירה המוכר לחזקות טבעיות ושלמות, נכון גם במקרה זה.

טענה 11.11

יהי r מספר ממשי כלשהו, ונתבונן בפונקציה

$$f(x) = x^r$$

המוגדרת עבור $x > 0$. לכל x בתחום זה, מתקיים:

$$f'(x) = rx^{r-1}$$

לא נוכיח טענה זו.

בעזרת הטענה, נגזור את פונקציית השורש:

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$$

הנגזרת היא

$$f'(x) = 0.5x^{0.5-1} = 0.5x^{-0.5} = \frac{0.5}{x^{0.5}}$$

מתקבלת הנוסחה:

$$\boxed{(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

הערה: נוסחה זו תקפה לכל $x > 0$. הפונקציה $f(x) = \sqrt{x}$ מוגדרת לכל $x \geq 0$, והנקודה $x = 0$ נמצאת בקצה תחום הגדרתה. כללית, לא נגזור פונקציות בקצה תחום הגדרתן.

עתה נגזור את הפונקציה

$$g(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}$$

נבטא את הפונקציה כחזקה:

$$g(x) = \frac{1}{x^1 \cdot x^{1/2}} = \frac{1}{x^{1.5}} = x^{-1.5}$$

לכן פונקציה זו גזירה בכל $x > 0$, ונגזרתה היא

$$g'(x) = -1.5x^{-2.5} = \frac{-3}{2x^2\sqrt{x}}$$

שאלה 15

גזרו את הפונקציות הבאות, עבור $x > 0$:

א. $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ב. $f(x) = \frac{x}{\sqrt[5]{x}}$

ג. $f(x) = \sqrt{3x}$ ד. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}}$

התשובה בעמוד 219

כלל השרשרת

נתבונן בפונקציות הבאות:

$$f_1(x) = (x^2 + 1)^{10}$$

$$f_2(x) = \sqrt{5x+1}$$

גזירת f_1 בשיטות שהכרנו תהיה כרוכה בעמל רב; לגזירת f_2 אין בידינו כלל מתאים.

המשותף לשתי הפונקציות הוא היותן **הרכבה** של פונקציות אחרות, פשוטות יותר.

נזכור שבהינתן פונקציות ממשיות f ו- g , פונקציית ההרכבה $f \circ g$ מוגדרת על ידי הנוסחה

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

תחום ההגדרה של $f \circ g$ הוא קבוצת המספרים x שעבורם $g(x)$ מוגדר, ושייך לתחום ההגדרה של f .

לרענון הידע בנושא זה, ענו על השאלה הבאה:

שאלה 16

א. תהיינה $g(x) = 1/x$, $f(x) = x^2 - x$. חשבו את ההרכבות $f \circ g$ ו- $g \circ f$. מהו תחום ההגדרה של כל אחת מהן?

ב. תהיינה $g(x) = \sqrt{x}$, $h(x) = x\sqrt{x} - \sqrt{x}$. מצאו פונקציה f כך ש- $h = f \circ g$.

התשובה בעמוד 219

עתה נחזור לפונקציות f_1, f_2 . נציג אותן כהרכבה:

$$f_1(x) = (x^2 + 1)^{10} = f(g(x)) \text{ עם } g(x) = x^2 + 1, f(x) = x^{10}.$$

$$f_2(x) = \sqrt{5x + 1} = f(g(x)) \text{ עם } g(x) = 5x + 1, f(x) = \sqrt{x}.$$

הכלל הבא, הנקרא **כלל השרשרת** מאפשר לגזור פונקציות המוצגות בצורה זו.

משפט 11.12 (כלל השרשרת)

תהי $u = f \circ g$. אם g גזירה ב- x_0 ו- f גזירה ב- $g(x_0)$, אז u גזירה ב- x_0 ומתקיים:

$$u'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

באופן מקוצר, נוכל להציג את כלל השרשרת כך:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

בהרכבה $f \circ g$, הפונקציה f נקראת הפונקציה החיצונית, והפונקציה g – הפונקציה הפנימית. במונחים אלה, ננסח את כלל השרשרת כך:

כדי לגזור הרכבת פונקציות יש לגזור את הפונקציה החיצונית, להציב בתוצאה את הפונקציה הפנימית, ולכפול בנגזרת של הפונקציה הפנימית.

נדגים את השימוש בכלל השרשרת:

א. נתבונן בפונקציה $f_1(x) = (1 + x^2)^{10}$ שהוגדרה לעיל.

הצגנו את הפונקציה כהרכבה:

הפונקציה החיצונית בהרכבה זו היא

הפונקציה הפנימית היא

נגזרת הפונקציה החיצונית היא:

לאחר הצבת הפונקציה הפנימית:

נגזרת הפונקציה הפנימית היא:

לפי כלל השרשרת:

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= f'(g(x)) \cdot g'(x) \\ &= 10 \cdot (1 + x^2)^9 \cdot 2x \\ &= 20x(1 + x^2)^9 \end{aligned}$$

ב. נתבונן בפונקציה $f_2(x) = \sqrt{5x + 1}$ שהוגדרה לעיל.

הצגנו את הפונקציה כהרכבה:

הפונקציה החיצונית בהרכבה זו היא

הפונקציה הפנימית היא

נגזרת הפונקציה החיצונית היא:

לאחר הצבת הפונקציה הפנימית:

נגזרת הפונקציה הפנימית היא:

לפי כלל השרשרת:

$$\begin{aligned} f_2'(x) &= f'(g(x)) \cdot g'(x) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{5x + 1}} \cdot 5 = \frac{5}{2\sqrt{5x + 1}} \end{aligned}$$

הערה: הפונקציה f_2 מוגדרת עבור ערכי x המקיימים: $5x + 1 \geq 0$, כלומר, בקטע

$[-1/5, \infty)$. חישוב הנגזרת תקף עבור כל x בקטע $(-1/5, \infty)$, כי עבור x כזה מתקיים

$5x + 1 > 0$, ולכן הפונקציה $f(x) = \sqrt{x}$ גזירה בנקודה $g(x) = 5x + 1$. בנקודה

$x = -1/5$ לא ניתן לגזור את הפונקציה, כי נקודה זו נמצאת בקצה תחום ההגדרה.

ג. עבור כל פונקציה ממשיית f , נתבונן בפונקציה

ניתן להציג את g כהרכבה:

נגזור לפי כלל השרשרת:

$$g'(x) = (s(f(x)))' = s'(f(x)) \cdot f'(x) = 2f(x)f'(x)$$

בדרך זו הוכחנו מחדש את הכלל $(f^2)' = 2ff'$, שהוכחנו בשאלה 10.

$$\triangleleft \text{כי } s'(x) = 2x$$

שאלה 17

לגבי כל אחת מהפונקציות הבאות, מצאו את תחום ההגדרה, וגזרו את הפונקציה. ציינו עבור אילו ערכי x חישוב הנגזרת תקף.

א. $f(x) = (2x + 1)^4$ ב. $f(x) = (1 - x)^{10}$

ג. $f(x) = (2 - x)^{-5}$ ד. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

ה. $f(x) = \sqrt{-x}$

התשובה בעמוד 220

שאלה 18

מצאו את הישר המשיק לאליפסה $x^2 + 3y^2 = 7$ בנקודה $(2, -1)$.
הדרכה: חלקו את האליפסה לשני חלקים, בהתאם לסימן של y . בטאו כל חלק כגרף של פונקציה.

התשובה בעמוד 221

נגזרות של פונקציות טריגונומטריות

נעבור לחישוב נגזרותיהן של הפונקציות הטריגונומטריות היסודיות. חישובים אלה מבוססים על הנוסחה הבאה (שלא תוכח):

משפט 11.13

פונקציית הסינוס גזירה בכל הישר. נגזרתה היא: $\sin'(x) = \cos x$

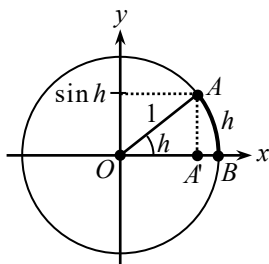
נזכור כי ציון זווית ללא יחידות משמעותו מדידת הזווית ברדיאנים. פשטותה של נוסחת הגזירה של פונקציית הסינוס נובעת מבחירה זו. ניתן להבין זאת מהתבוננות בנגזרת פונקציית הסינוס בנקודה $x = 0$. לפי נוסחת הגזירה:

$$\sin'(0) = \cos 0 = 1$$

לפי הגדרת הנגזרת, הנגזרת $\sin'(0)$ היא הגבול

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(0 + h) - \sin 0}{h}$$

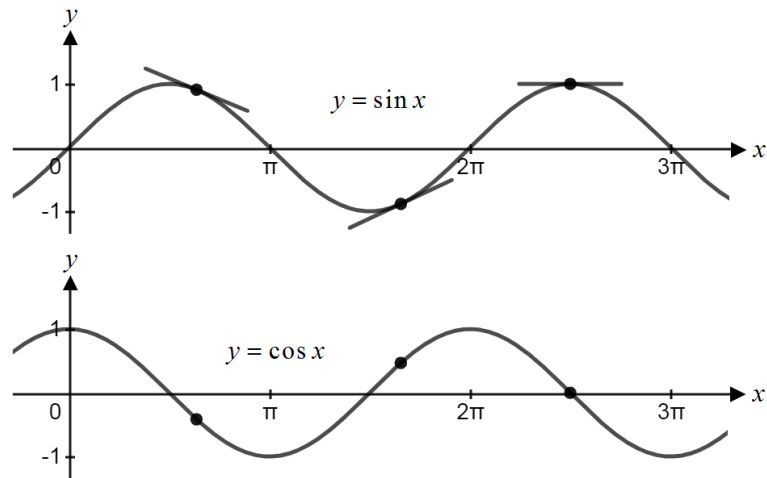
מכאן: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$



כדי להבין את המשמעות הגיאומטרית של גבול זה, נתבונן באיור משמאל. על מעגל היחידה הוקצתה נקודה A כך שהרדיוס OA יוצר זווית בגודל h עם ציר ה- x . A' היא היטל הנקודה A על ציר ה- x , ו- B היא הנקודה $(1, 0)$.

הזווית h , הנמדדת ברדיאנים, שווה לאורך הקשת $\widehat{AB}$. אורך הקטע AA' הוא $\sin h$. ככל ש- h מתקרב ל-0, כך מתקרב המקטע $\widehat{AB}$ בצורתו לקו ישר, והיחס בין אורכו לאורך הקטע AA' מתקרב ל-1.

התבוננות בגרף הפונקציה $f(x) = \sin x$ ובגרף הנגזרת $f'(x) = \cos x$ מספקת המחשה נאה למשמעות הנגזרת כשיפוע הישר המשיק:



ניתן לראות שבנקודות שבהן הקוסינוס חיובי, שיפוע הישר המשיק לגרף פונקציית הסינוס הוא חיובי, ובהתאם לכך גרף פונקציית הסינוס נמצא במגמת עלייה. בנקודות שבהן הקוסינוס שלילי – שיפוע המשיק שלילי וגרף הפונקציה במגמת ירידה. בנקודות שבהן הקוסינוס מתאפס, המשיק מקביל לציר ה- x , וגרף הפונקציה מחליף את מגמתו מירידה לעלייה או להפך.

נעבור לגזירת הפונקציות הטריגונומטריות האחרות:

משפט 11.14

פונקציות הקוסינוס, הטנגנס והקוטנגנס גזירות בתחומי הגדרתן. נגזרותיהן הן:

$$\cos'(x) = -\sin x ; \tan'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} ; \cot'(x) = \frac{-1}{\sin^2 x}$$

הוכחה

כדי לגזור את פונקציית הקוסינוס, נסתמך על הזהויות:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$$

זהויות אלה נובעות מיידית מנוסחאות הסינוס והקוסינוס של סכום זוויות:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin\frac{\pi}{2}\cos x + \cos\frac{\pi}{2}\sin x = 1 \cdot \cos x + 0 \cdot \sin x = \cos x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos x - \sin\frac{\pi}{2}\sin x = 0 \cdot \cos x - 1 \cdot \sin x = -\sin x$$

נגזור אפוא את הפונקציה $\cos x = \sin(\pi/2 + x)$ לפי כלל השרשרת:

$$\begin{aligned}\cos' x &= \left(\sin(\pi/2 + x) \right)' = \cos(\pi/2 + x) \cdot (\pi/2 + x)' = -\sin x \cdot 1 \\ &= -\sin x\end{aligned}$$

נעבור לפונקציית הטנגנס. פונקציה זו מוגדרת כמנה:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

בנקודות שבהן הפונקציה מוגדרת, מתקיים $\cos x \neq 0$, וניתן לגזור לפי כלל נגזרת המנה:

$$\begin{aligned}\tan'(x) &= \frac{\sin'(x)\cos x - \cos'(x)\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cos x - (-\sin x \sin x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}\end{aligned}$$

בצעד האחרון הסתמכנו על הזהות שלמדנו בעבר, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

באופן דומה, נגזור את פונקציית הקוטנגנס:

$$\begin{aligned}\cot' x &= \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)' = \frac{\cos'(x)\sin x - \cos x \sin'(x)}{\sin^2 x} \\ &= \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x}\end{aligned}$$

□

בדוגמאות הבאות נגזור פונקציות טריגונומטריות, ופונקציות שבהגדרתן משתתפות פונקציות טריגונומטריות. נסתמך על כללי הגזירה ועל זהויות טריגונומטריות מוכרות.

א. נגזור את הפונקציה $f(x) = \sin^2 x$ על סמך כלל השרשרת:

$$\begin{aligned}f'(x) &= 2\sin x \cdot (\sin x)' = 2\sin x \cos x \\ &= \sin 2x\end{aligned}$$

לפי נוסחאות הזווית הכפולה:

ב. נגזור את הפונקציה $f(x) = \tan 5x$ על סמך כלל השרשרת:

$$f'(x) = \tan'(5x) \cdot (5x)' = \frac{5}{\cos^2 5x}$$

ג. נגזור את הפונקציה $f(x) = \sin x + x \cos x$ על סמך כללי נגזרת הסכום והמכפלה:

$$\begin{aligned}f'(x) &= \sin' x + (x)' \cos x + x \cos'(x) = \cos x + \cos x - x \sin x \\ &= 2\cos x - x \sin x\end{aligned}$$

ד. נגזור את הפונקציה $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ לפי כלל גזירת המנה:

$$f'(x) = \frac{\sin'(x) \cdot x - \sin x \cdot (x)'}{x^2} = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$$

שאלה 19

גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \cot(2x)$ ב. $f(x) = \cos^5 x$

ג. $f(x) = \frac{1}{2 + \sin x}$ ד. $f(x) = \tan x \tan 3x$

ה. $f(x) = \sqrt{\sin x}$ ו. $f(x) = \sin^5 x - 3\sin^2 x + 1$

ז. $f(x) = \cos(x^2)$ ח. $f(x) = \cos 2x + 2\sin^2 x$

התשובה בעמוד 221

נגזרת של פונקציה מעריכית

בהינתן מספר חיובי a , נתבונן בפונקציית החזקה $f(x) = a^x$ המספר a נקרא, כפי שהגדרנו בעבר, בסיס החזקה.

כדי לגזור פונקציות מסוג זה, נתבונן תחילה במקרה שבו בסיס החזקה הוא קבוע אוילר:

$$e = 2.718281828459...$$

מספר זה נקרא **הבסיס הטבעי** לחזקות וללוגריתמים. הסיבה לכך נעוצה במשפט הבא:

משפט 11.15

הפונקציה המעריכית $f(x) = e^x$ גזירה בכל הישר. נגזרתה היא: $f'(x) = e^x$

זו אינה טעות: נגזרתה של הפונקציה $f(x) = e^x$ היא הפונקציה עצמה. תכונה זו היא ייחודית לבסיס e , כפי שנראה בהמשך.

לא נוכיח את המשפט. נגזור בעזרתו פונקציות נוספות:

א. נגזור את הפונקציה $f(x) = e^{x^2}$:

נגדיר $h(x) = e^x$, $g(x) = x^2$

נקבל $f(x) = h(g(x))$

לפי המשפט האחרון: $h'(x) = e^x$

לכן, לפי כלל השרשרת, $f'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x) = e^{x^2} \cdot 2x$

ב. נגזור את הפונקציה $f(x) = e^{-x}$:

לפי כלל השרשרת, $f'(x) = e^{-x} \cdot (-x)' = -e^{-x}$

ג. נגזור את הפונקציה $f(x) = xe^x$:

לפי כלל נגזרת המכפלה,

$$f'(x) = (x)'e^x + x(e^x)' = e^x + xe^x = e^x(x+1)$$

שאלה 20

גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = e^{2x}$ ב. $f(x) = (e^x)^3$ ג. $f(x) = (1 + e^x)^5$

ד. $f(x) = e^x(x^4 + 2x^3)$ ה. $f(x) = \frac{x^2 + \sqrt{x}}{e^x}$

התשובה בעמוד 223

כדי לגזור פונקציות חזקה כלליות, נשתמש בזהות הבאה:

$$a^b = e^{b \ln a}$$

זהות זו נלמדה בשיעור 7, והוכחה מיידית: $e^{b \ln a} = e^{\ln a^b} = (e^{\ln a})^b = a^b$ בעזרתה נקבל:

משפט 11.16

לכל $a > 0$, הפונקציה המעריכית $f(x) = a^x$ גזירה בכל הישר, ונגזרתה היא:

$$f'(x) = a^x \ln a$$

הוכחה

לפי הזהות לעיל, $f(x) = e^{x \ln a}$
 לכן, לפי כלל השרשרת $f'(x) = e^{x \ln a} \cdot (x \ln a)' = e^{x \ln a} \ln a$
 שוב, לפי אותה זהות: $= a^x \ln a$ □

לדוגמה, נגזרת הפונקציה $f(x) = 2^x$ היא $f'(x) = 2^x \ln 2$.
 מכאן אנו רואים שמבין הפונקציות מהצורה $f(x) = a^x$, רק הפונקציה $f(x) = e^x$ שווה לנגזרת של עצמה.

חשוב לשים לב להבדל שבין הנוסחאות הבאות:

$$(x^r)' = rx^{r-1} \quad (a^x)' = a^x \ln a$$

הנוסחה הראשונה תקפה לפונקציות המבוטאות כחזקה שבה **המעריך** קבוע.
 הנוסחה השנייה תקפה לפונקציות המבוטאות כחזקה שבה **הבסיס** קבוע.

עתה נתבונן בחזקות שבהן גם הבסיס וגם המעריך אינם קבועים. לדוגמה:

$$f(x) = x^x$$

תחום ההגדרה של פונקציה זו הוא קבוצת המספרים הממשיים החיוביים.
 כיצד נגזור את הפונקציה? האם נוכל להיעזר באחת הנוסחאות שרשומות לעיל?
 התשובה היא שלילית, שכן נוסחאות אלה תקפות רק למצבים שבהם הבסיס או המעריך קבועים. נחזור לפונקציות אלה בהמשך.

נגזרת של פונקציה לוגריתמית

פונקציית הלוגריתם בבסיס a (מספר חיובי ושונה מ-1) היא: $f(x) = \log_a x$. פונקציה זו מוגדרת עבור כל x חיובי.

כש- $a = e$ מתקבלת פונקציית הלוגריתם הטבעי: $f(x) = \ln x = \log_e x$

גם לפונקציה זו יש נגזרת פשוטה במיוחד.

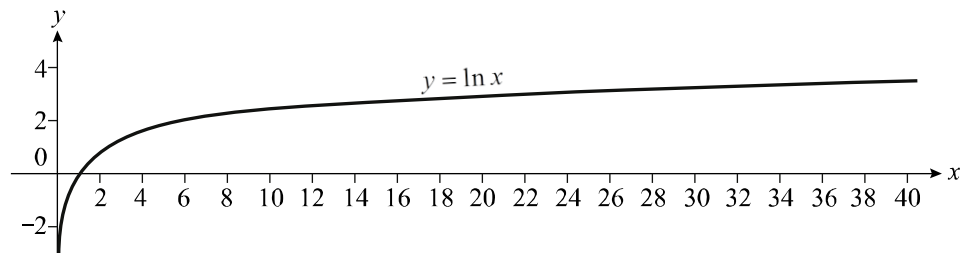
משפט 11.17

הפונקציה $f(x) = \ln x$ גזירה בתחום הגדרתה (כלומר לכל $x > 0$).

נגזרתה היא: $f'(x) = \frac{1}{x}$

לא נוכיח את המשפט.

מנוסחת הגזירה של פונקציית הלוגריתם הטבעי ניתן לראות ששיפוע המשיק לגרף בנקודה x הולך וקטן, ומתקרב ל-0, ככל ש- x גדל. מגמת הגרף הולכת ומשתטחת, כפי שניתן לראות באיור:



בהסתמך על נוסחת הגזירה לפונקציית הלוגריתם הטבעי, נגזור פונקציות נוספות.

$$a > 0, a \neq 1 \triangleleft$$

א. נתבונן בפונקציה לוגריתמית כללית:

לפי נוסחת שינוי הבסיס, $f(x) = \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$

לכן, לפי טענה 11.5: $f'(x) = \frac{1}{\ln a} (\ln x)' = \frac{1}{x \ln a}$

מתקבלת הנוסחה: $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

$$\triangleleft \text{הגדרנו בשיעור 7:} \\ \log x = \log_{10} x$$

לדוגמה, נגזרת הלוגריתם לפי בסיס 10 היא: $(\log x)' = \frac{1}{x \ln 10}$

מנוסחה זו אנו רואים שרק ללוגריתם בבסיס e יש את הנגזרת הפשוטה $1/x$. זו הסיבה לבחירת בסיס זה כבסיס הטבעי ללוגריתם.

ב. נגזור את הפונקציה: $f(x) = \ln(2x + 1)$

$$f'(x) = \frac{1}{2x+1} \cdot (2x+1)' = \frac{2}{2x+1}, \quad \text{לפי כלל השרשרת,}$$

נוסחה זו תקפה בכל תחום ההגדרה של הפונקציה, כלומר בקטע $(-0.5, \infty)$.

ג. נגזור את הפונקציה $f(x) = \ln^5 x$

(הערה: בדומה לחזקות הפונקציות הטריגונומטריות משמעות הסימון $\ln^5 x$ היא $(\ln x)^5$).

תחום הגדרת הפונקציה הוא המספרים החיוביים. נגזור את הפונקציה בתחום זה:

$$f'(x) = 5 \ln^4 x \cdot (\ln x)' = \frac{5 \ln^4 x}{x}, \quad \text{לפי כלל השרשרת,}$$

ד. נחזור אל הפונקציה: $f(x) = x^x$

תחום הגדרת הפונקציה הוא קבוצת המספרים הממשיים החיוביים.

נגזור את הפונקציה בתחום זה:

$$f(x) = e^{x \ln x} \quad \text{לפי הזהות } a^b = e^{b \ln a}, \text{ נציג את הפונקציה כך:}$$

$$g(x) = x \ln x \quad \text{נגדיר את הפונקציה:}$$

$$f(x) = e^{g(x)} \quad \text{נקבל:}$$

$$f'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x) = f(x)g'(x) \quad \text{נגזור לפי כלל השרשרת:}$$

נגזור את הפונקציה g לפי כלל נגזרת המכפלה:

$$g'(x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

$$f'(x) = f(x)g'(x) = x^x (\ln x + 1) \quad \text{לכן:}$$

בדרך שתוארה בדוגמה האחרונה נוכל לגזור פונקציות נוספות מהצורה $f(x)^{g(x)}$: בעזרת הזהות $a^b = e^{b \ln a}$ נציגן כהרכבה של הפונקציה $k(x) = e^x$ עם פונקציה נוספת, ונגזור לפי כלל השרשרת.

שאלה 21

גזרו את הפונקציות הבאות:

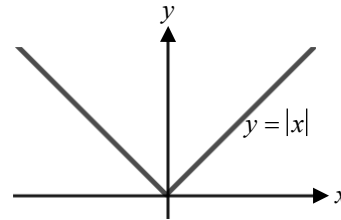
$$\text{א. } f(x) = \ln(3x) \quad \text{ב. } f(x) = \ln(x^2 + 1) \quad \text{ג. } f(x) = \frac{1}{\ln x}$$

$$\text{ד. } f(x) = \log_3(x) \quad \text{ה. } f(x) = (x+1)^{x-1} \quad \text{ו. } f(x) = \ln \cos x$$

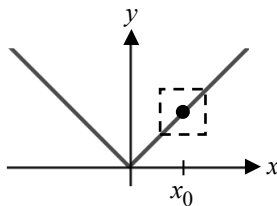
התשובה בעמוד 224

נגזרת פונקציית הערך המוחלט

נתבונן בגרף הפונקציה $f(x) = |x|$:

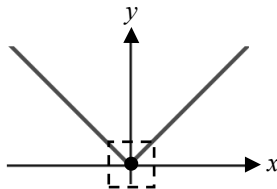


כפי שלמדנו בעבר, פונקציה זו היא 'הדבקה' של שתי פונקציות לינאריות: הפונקציה $f_1(x) = -x$ בקטע $(-\infty, 0)$ והפונקציה $f_2(x) = x$ בקטע $[0, \infty)$.



כעת נתבונן בנקודה $x_0 > 0$. אם נתמקד בסביבה קטנה מספיק של הנקודה $(x_0, f(x_0))$, יתלכד גרף הפונקציה עם הקו הישר $f_2(x) = x$. לכן $f'(x_0) = 1$.

באופן דומה, אם $x_0 < 0$, בסביבה קטנה מספיק של נקודה זו, גרף הפונקציה מתלכד עם הקו הישר $f_1(x) = -x$. לכן $f'(x_0) = -1$.



כעת נתבונן בנקודה $x_0 = 0$. ככל שנתמקד בסביבה קטנה של נקודה זו, תמיד נראה את שני הקווים הישרים השונים: $y = x$ ו- $y = -x$. במקרה זה, צורת הגרף אינה מתקרבת לצורת קו ישר ככל שנתמקד בנקודה x_0 , ולכן הפונקציה f אינה גזירה בנקודה זו.

דרך נוספת להבין את אי-גזירות הפונקציה בנקודה $x_0 = 0$ היא באמצעות הגדרת הנגזרת. לפי הגדרה זו,

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h}$$

אך ראינו בעמוד 88 שגבול זה לא קיים.

לכן פונקציית הערך המוחלט גזירה רק בנקודות x המקיימות $x \neq 0$. נגזרתה בנקודות אלה היא

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} = \frac{|x|}{x}$$

יתרוננו של הביטוי האחרון שמצאנו הוא בכך שגם ביטוי זה מוגדר בדיוק כאשר $x \neq 0$.

סיכום כללי הגזירה היסודיים

כללי הגזירה שלמדנו נותנים בידינו את נגזרותיהן של פונקציות יסודיות כגון: פונקציות לינאריות, פונקציות חזקה, והפונקציות הטריגונומטריות היסודיות – וגם כללים לגזירת פונקציות המתקבלות מפעולות שונות כגון חיבור, כפל והרכבה.

ארגז כלים עשיר זה מאפשר לגזור פונקציות רבות, ופעולת הגזירה בדרך כלל מובנת מיידית מהדרך שבה הוגדרה הפונקציה.

נזכור כי הסימון לנגזרת הפונקציה f בנקודה x הוא $f'(x)$. סימון זה מבטא את היותה של f' פונקציה חדשה, שהוגדרה על סמך הפונקציה המקורית f . לעתים אנו משתמשים, לצורכי נוחיות בלבד, בסימון $(f(x))'$. סימון זה אינו מדויק, שהרי $f(x)$ הוא תוצאת הצבת המספר x בפונקציה f . ערך מספרי זה אינו קובע את ערך הנגזרת של f ב- x . יחד עם זאת, סימון זה מצליח להבליט את דרך השימוש בכללי הגזירה השונים, ולכן (במיוחד בשלב זה של הלימודים) אנו מרבים להשתמש בו.

הרשימה הבאה כוללת את כללי הגזירה שנלמדו:

א. נגזרת הסכום: $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

ב. נגזרת ההפרש: $(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x)$

ג. נגזרת של מכפלת פונקציה בקבוע: $(c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x)$

ד. נגזרת המכפלה: $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

ה. נגזרת המנה: $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$

ו. כלל השרשרת: $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

ז. נגזרת של פונקציה לינארית: $(ax + b)' = a$

ח. נגזרת של פונקציית חזקה: $(x^r)' = rx^{r-1}$

ט. נגזרת פונקציית השורש: $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

י. נגזרות הפונקציות הטריגונומטריות היסודיות:

$$\sin'(x) = \cos x \quad \cos'(x) = -\sin x$$

$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \cot'(x) = \frac{-1}{\sin^2 x}$$

יא. נגזרות הפונקציות המעריכיות: $(e^x)' = e^x$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

יב. נגזרות הפונקציות הלוגריתמיות: $\ln'(x) = \frac{1}{x}$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

יג. נגזרת פונקציית הערך המוחלט: $(|x|)' = \frac{|x|}{x}$

לסיכום נושא גזירת הפונקציות, ענו על השאלות הבאות.

שאלה 22

גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 - x - 1$

ב. $f(x) = \frac{x}{8x+1}$

ג. $f(x) = (1 - x^{10})^5$

ד. $f(x) = \sin 5x + \tan x^2$

ה. $f(x) = \ln(2x^2 + 1)$

ו. $f(x) = 5\sqrt{x}$

התשובה בעמוד 225

שאלה 23

ממגדל שגובהו 15 מטרים מפילים כדור. גובה הכדור בזמן t נתון על ידי הנוסחה:

$$h(t) = 15 - \frac{gt^2}{2}$$

בנוסחה זו g מציין את **קבוע הכבידה**, השווה בערך ל-9.8. הזמן t נתון בשניות.

א. כמה זמן יעבור עד שהכדור יפגע בקרקע?

ב. מה תהיה מהירות הכדור שנייה אחת לאחר תחילת הנפילה?

ג. מה תהיה מהירות הכדור ברגע הפגיעה בקרקע?

התשובה בעמוד 226

מציאת תחומי העלייה והירידה של פונקציה

כאמור בתחילת שיעור זה, הנגזרת של פונקציה בנקודה מבטאת את שיפוע הישר המשיק לגרף הפונקציה, ובכך – את מגמתו של גרף זה.

בפרט, סימן הנגזרת מאפשר למצוא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה: בקטעים שבהם הפונקציה גזירה והנגזרת חיובית – הפונקציה עולה; בקטעים שבהם הפונקציה גזירה והנגזרת שלילית – הפונקציה יורדת; ואם בקטע מסוים הנגזרת היא 0, אז הפונקציה אינה עולה ואינה יורדת, כלומר, היא קבועה.

תובנות אלה מנוסחות במשפט הבא, שלא נוכיח באופן פורמלי:

משפט 11.18

תהי f פונקציה מוגדרת בקטע I וגזירה בכל נקודותיו.

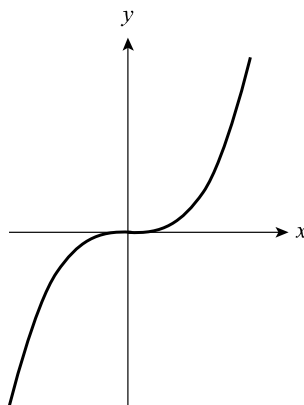
א. אם $f'(x) > 0$ לכל $x \in I$ אז f עולה ב- I .

ב. אם $f'(x) < 0$ לכל $x \in I$ אז f יורדת ב- I .

ג. אם $f'(x) = 0$ לכל $x \in I$ אז f קבועה ב- I (כלומר, הצמצום $f|_I$ הוא פונקציה קבועה).

ניתן לרכך במקצת את הדרישה לחיוביות, או שליליות, הנגזרת בקטע.

נתבונן, למשל, בפונקציה $f(x) = x^3$. גרף הפונקציה נראה כך:



◁ ראו שאלה 29 בשיעור 6.

פונקציה זו היא עולה בכל הישר.

אך האם נגזרתה חיובית בכל הישר?

נגזור:

$$f'(x) = 3x^2$$

נגזרת הפונקציה מקיימת $f'(x) \geq 0$ לכל x , אך מתאפסת בנקודה $x_0 = 0$.

נאמר שנקודת ההתאפסות של נגזרת של פונקציה היא **מבודדת** אם אינה חלק מקטע שבו הנגזרת מתאפסת.

המשפט הבא (שלא נוכיח) הוא חיזוק של המשפט הקודם:

משפט 11.19

תהי f פונקציה מוגדרת בקטע I וגזירה בכל נקודותיו.

א. אם $f'(x) \geq 0$ לכל $x \in I$, ונקודות ההתאפסות של f' הן מבודדות, אז f עולה ב- I .

ב. אם $f'(x) \leq 0$ לכל $x \in I$, ונקודות ההתאפסות של f' הן מבודדות, אז f יורדת ב- I .

ממשפט זה נוכל להסיק שהפונקציה $f(x) = x^3$ עולה בכל הישר, על סמך נגזרתה: אמנם $f'(0) = 0$, אך נקודת התאפסות זו היא מבודדת; ובכל נקודה אחרת מתקיים $f'(x) > 0$.

בדוגמאות הבאות נמצא את תחומי העלייה והירידה של פונקציות, לפי ניתוח סימן נגזרתן:

א. נפתח בדוגמה מוכרת, והיא פונקציה ריבועית: $f(x) = ax^2 + bx + c$

נניח ש- $a > 0$. במקרה זה, גרף הפונקציה f הוא פרבולה חיובית ("מחייכת").

נגזור את הפונקציה (בנקודה x כלשהי):

$$f'(x) = 2ax + b = 2a\left(x + \frac{b}{2a}\right)$$

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

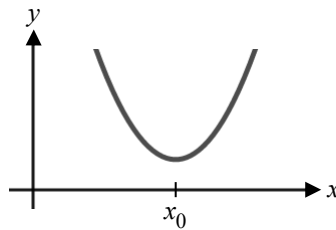
הנגזרת מתאפסת בנקודה:

נקודה זו היא שיעור x של **קודקוד** הפרבולה.

עבור $x < x_0$ מתקיים $f'(x) < 0$, ועבור $x > x_0$ מתקיים $f'(x) > 0$. מכך נסיק:

- f יורדת בקטע $(-\infty, x_0]$, כי $f'(x) \leq 0$ לכל x בקטע זה, ונקודת ההתאפסות של הנגזרת ($x = x_0$) היא מבודדת.

- f עולה בקטע $[x_0, \infty)$, כי $f'(x) \geq 0$ לכל x בקטע זה, ונקודת ההתאפסות של הנגזרת ($x = x_0$) היא מבודדת.

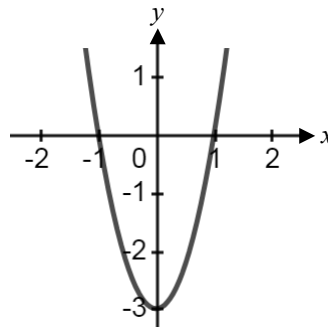


ב. נתבונן בפונקציה: $f(x) = x^3 - 3x$

פונקציה זו מוגדרת וגזירה בכל הישר הממשי, ונגזרתה היא

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$$

גרף פונקציית הנגזרת נראה כך:



הנגזרת היא חיובית עבור $x > 1$ או $x < -1$, שלילית עבור $-1 < x < 1$, ומתאפסת עבור $x = \pm 1$.

מכך נסיק:

- f עולה בקטע $(-\infty, -1]$
(הנגזרת חיובית בקטע זה, פרט לנקודה -1 שבה היא מתאפסת).
- f יורדת בקטע $[-1, 1]$
(הנגזרת שלילית בקטע זה, למעט בקצוות שבהם הנגזרת מתאפסת).
- f עולה בקטע $[1, \infty)$
(הנגזרת חיובית בקטע זה, פרט לנקודה 1 שבה היא מתאפסת).

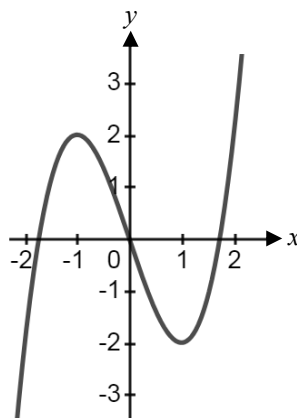
ניעזר במידע זה כדי לשרטט את גרף הפונקציה באופן סכמטי. נחשב את ערכי f

$$f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) = 2 \quad : x = \pm 1$$

$$f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 = -2$$

נשים לב ש- f היא פונקציה אי־זוגית.

גרף הפונקציה נראה כך:



בדוגמה זו ראינו איך החשבון הדיפרנציאלי מאפשר למצוא תחומי עלייה וירידה של פונקציה בקלות רבה. מציאת תחומים אלה ללא חשבון דיפרנציאלי היא קשה מאוד, ובמקרים רבים – בלתי אפשרית.

שאלה 24

מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$

ב. $f(x) = x - 6x^2$

ג. $f(x) = e^x(3 - x)$

התשובה בעמוד 226

בעיות מינימום ומקסימום

בעיות אופטימיזציה עוסקות במצבים שבהם נדרשת קבלת החלטה מסוימת, ורוצים שההחלטה תביא לתועלת מירבית, או לנזק מזערי.

מצבים אלה מתרחשים בהקשרים רבים. מקבל ההחלטה יכול להיות, למשל, אדם, חברה, או מערכת אוטומטית הנשלטת על ידי תוכנת מחשב.

החשבון הדיפרנציאלי מאפשר לפתור בעיות אופטימיזציה שבהן ההחלטה הנדרשת היא לגבי ערכו של משתנה ממשי מסוים, והתועלת או הנזק מוגדרים כפונקציה של אותו משתנה.

נתבונן בדוגמה הבאה:

יצרן הוציא לשוק מוצר חדש, ומתלבט כיצד לתמחר אותו. עלות הייצור של המוצר היא 300 שקלים. סקרי שוק הראו שבמחיר זה ימכור היצרן כ-10,000 יחידות בחודש (אך לא ירוויח דבר). סקרים נוספים הראו שהעלאת המחיר תביא לירידה מעריכית בכמות הלקוחות: כל העלאה של המחיר ב-50 שקלים תקטין את מספרם במחצית.

טווח המחירים הסביר, מבחינת היצרן, הוא בין 300 שקלים לבין 600 שקלים. מהו המחיר שעבורו יפיק היצרן את הרווח המקסימלי? מה יהיה רווח זה?

נסמן את המחיר שייגבה היצרן ב- $300 + 50x$, ונסמן $A = 10,000$.

מספר היחידות שימכור היצרן ברמת מחיר זו הוא: $\frac{A}{2^x}$

הרווח שיפיק היצרן מכל יחידה הוא $50x$, ולכן הרווח הכללי שיפיק היצרן הוא

$$p(x) = (50x) \cdot \frac{A}{2^x} = 50A \cdot x 2^{-x}$$

בהתאם לאילוצים שהגדיר היצרן, נדרש לקיים $300 \leq 300 + 50x \leq 600$ כלומר, $0 \leq x \leq 6$

בעייתו של היצרן היתרגמה אפוא לבעיה הבאה:

עבור איזה $0 \leq x \leq 6$ תקבל הפונקציה $p(x)$ את ערכה הגדול ביותר?

כדי לפתור את בעייתו של היצרן, נמצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה p .

נגזור את הפונקציה, לפי כלל גזירת המכפלה: $p'(x) = 50A(2^{-x} + x(2^{-x})')$

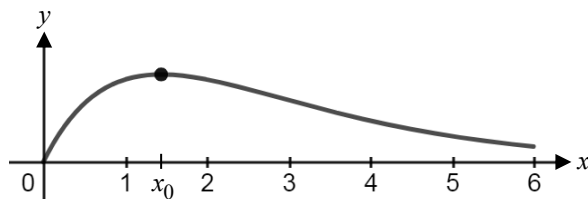
נגזרת הפונקציה $f(x) = 2^{-x} = (1/2)^x$ היא:

$$f'(x) = (1/2)^x \ln(1/2) = 2^{-x} \cdot (-\ln 2)$$

$$p'(x) = 50A(2^{-x} - x2^{-x} \cdot \ln 2) = 50A2^{-x}(1 - x \cdot \ln 2) \quad \text{נציב:}$$

$$x_0 = \frac{1}{\ln 2} \approx 1.44 \quad \text{נסמן:}$$

הנגזרת $p'(x)$ מתאפסת בנקודה זו, והיא חיובית עבור $x < x_0$, ושלילית עבור $x > x_0$.
לכן הפונקציה p עולה בקטע $[0, x_0]$, ויורדת בקטע $[x_0, 6]$.
גרף הפונקציה p נראה כך:



אנו רואים אפוא שהפונקציה p מקבלת בנקודה x_0 את ערכה הגבוה ביותר. המחיר שניב את הרווח הגדול ביותר הוא:
 $300 + 50x_0 \approx 372.13$
סביר להניח שהיצרן יעגל מחיר זה ל-372 שקלים.

הרווח ליצרן עבור מחיר זה הוא $p(x_0) = 50Ax_0 2^{-x_0} \approx 265,000$
לשם השוואה, מחיר של 350 שקלים יניב את הרווח: $p(1) = 25A = 250,000$

דוגמה זו מראה את התועלת שבחישובי מינימום ומקסימום, ואת השימושיות של תחומי העלייה והירידה של הפונקציה למציאתם.

נעבור למספר הגדרות כלליות:

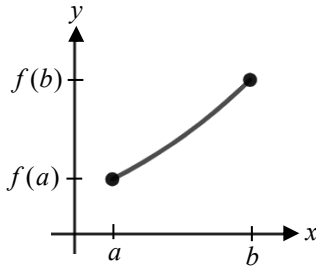
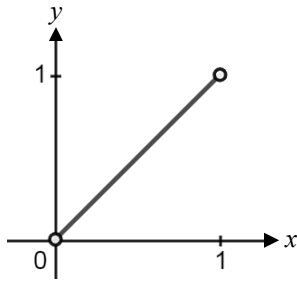
תהי f פונקציה המוגדרת בקטע I .

נקודה $x_0 \in I$ נקראת **נקודת מקסימום** של f בקטע I אם בנקודה זו מקבלת הפונקציה את ערכה הגדול ביותר. במקרה זה הערך $f(x_0)$ נקרא **המקסימום** של f בקטע I .

בדומה לכך, x_0 היא **נקודת מינימום** של f בקטע I אם בנקודה זו מקבלת הפונקציה את ערכה הקטן ביותר. במקרה זה, הערך $f(x_0)$ נקרא **המינימום** של f ב- I .

למשל, עבור הפונקציה p שניתחנו לעיל, $x_0 = 1/\ln 2$ היא נקודת המקסימום של הפונקציה בקטע $[1, 6]$, והערך $p(x_0) \approx 265,000$ הוא המקסימום של הפונקציה בקטע. כמו כן, 0 היא נקודת המינימום של הפונקציה בקטע, והערך $p(0) = 0$ הוא המינימום שלה בקטע.

נקודת מינימום או מקסימום נקראת **נקודת קיצון**; המינימום והמקסימום נקראים **ערכי קיצון**.



יש מקרים שבהם לפונקציה אין מינימום או מקסימום בקטע. אם נתבונן, למשל, על הפונקציה $f(x) = x$ בקטע הפתוח $(0, 1)$, נגלה שלפונקציה זו אין מינימום בקטע זה. היינו רוצים אולי לאמר ש- $f(0) = 0$ הוא המינימום של הפונקציה בקטע, אך הנקודה 0 אינה שייכת לקטע $(0, 1)$. כל מועמד אחר לערך המינימלי של הפונקציה בקטע ייפסל, כי תמיד נוכל למצוא ערך קטן יותר. באופן דומה, לפונקציה זו אין מקסימום בקטע זה.

אך אם נתונה פונקציה מונוטונית (=עולה או יורדת) המוגדרת בקטע סגור $[a, b]$, אז יש לפונקציה מינימום ומקסימום והם יתקבלו בהכרח בקצות הקטע.

אם, למשל, הפונקציה $f(x)$ היא עולה בקטע $[a, b]$ אז המינימום של f הוא $f(a)$ והמקסימום שלה הוא $f(b)$.

באופן כללי יותר, אם הפונקציה f מוגדרת בקטע הסגור $[a, b]$, וידועה לנו חלוקה של הקטע $[a, b]$ לתחומי עלייה וירידה של הפונקציה f , אז המינימום והמקסימום של f יתקבלו בהכרח בנקודות קצה של תחומי העלייה והירידה. כדי למצוא אותם, יש לחשב את ערכי הפונקציה בנקודות קצה אלה, ולבחור מביניהם את הגדול ביותר ואת הקטן ביותר.

בדוגמאות הבאות נחשב ערכי קיצון של פונקציה בקטע:

א. נתבונן בפונקציה $f(x) = 2x + 1$ בקטע $[3, 5]$. פונקציה זו היא עולה, ולכן ערכה הקטן ביותר מתקבל בנקודה $x = 3$.

$$f(3) = 2 \cdot 3 + 1 = 7$$

המינימום של f בקטע הוא:

הערך הגדול ביותר של f בקטע מתקבל בנקודה $x = 5$.

$$f(5) = 2 \cdot 5 + 1 = 11$$

המקסימום של f בקטע הוא:

הנקודות $x = 3$ ו- $x = 5$ הן (בהתאמה) נקודת המינימום ונקודת המקסימום של f בקטע.

ב. נתבונן בפונקציה $f(x) = x^3 - 3x$ בקטע $[0, 2]$.

בדוגמה קודמת מצאנו שהפונקציה f , כשהיא מוגדרת בישר כולו, עולה בקטע $(-\infty, -1]$, יורדת בקטע $[-1, 1]$ ועולה בקטע $[1, \infty)$ (כמוצג באיור משמאל).

בצמצום לקטע $[0, 2]$ נקבל ש- f יורדת בקטע $[0, 1]$ ועולה בקטע $[1, 2]$.

מכאן נובע שהמינימום של הפונקציה בקטע מתקבל בנקודה $x = 1$. המינימום הוא:

$$f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 = -2$$

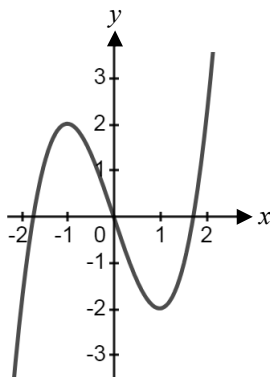
המקסימום של f בקטע $[0, 2]$ מתקבל באחת מנקודות הקצה: $x = 0$ או $x = 2$.

כדי לדעת היכן, נחשב את ערכי הפונקציה בשתי הנקודות ונבחר את הגדול מביניהם.

$$f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0 = 0$$

$$f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2 = 2$$

לכן המקסימום של f בקטע $[0, 2]$ הוא 2. נקודת המקסימום היא $x = 2$.



ג. נתבונן שוב בפונקציה $f(x) = x^3 - 3x$, הפעם בקטע $[-2.1, 2.1]$.

מניתוח תחומי העלייה והירידה שביצענו לעיל, נובע שבקטע הנתון, תחומי העלייה והירידה הם:

f עולה בקטע $[-2.1, -1]$, יורדת בקטע $[-1, 1]$, ועולה שוב בקטע $[1, 2.1]$.

הנקודות ה"חשודות" כנקודות קיצון הן נקודות הקצה של תחומי העלייה והירידה, כלומר הנקודות $-2.1, -1, 1, 2.1$.

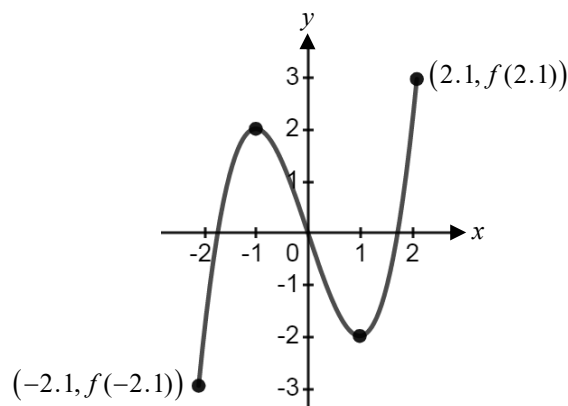
נחשב את ערך הפונקציה f בכל אחת מהנקודות:

$$f(1) = -2, f(2.1) = 2.1^3 - 3 \cdot 2.1 = 2.961$$

$$f(-1) = 2, f(-2.1) = -2.961$$

זכרו כי f אי-זוגית.

מבין ערכים אלה, $f(-2.1) = -2.961$ הוא הקטן ביותר, ו- $f(2.1) = 2.961$ הוא הגדול ביותר. ערכים אלה הם המינימום והמקסימום (בהתאמה) של הפונקציה בקטע; הנקודות $x = -2.1$ ו- $x = 2.1$ הן (בהתאמה) נקודות המינימום והמקסימום של הפונקציה בקטע.



בדוגמה זו ניתן לראות תופעה נוספת, של **נקודות קיצון מקומיות**:

נתבונן בנקודה $x = 1$. נקודה זו אינה נקודת מינימום של הפונקציה בכל הקטע הנתון, אך אם נצטמצם לקטע קטן סביבה (למשל הקטע $(0, 2)$) נקבל שהיא נקודת מינימום של הפונקציה ביחס לקטע קטן זה. במקרה כזה, הנקודה נקראת **נקודת מינימום מקומית**.

באופן דומה, הנקודה $x = -1$ היא **נקודת מקסימום מקומית**: אם נצטמצם לקטע קטן סביבה (למשל הקטע $(-2, 0)$) נקבל שנקודה זו היא נקודת מקסימום ביחס אליו.

המשותף לשתי הנקודות $x = 1$ ו- $x = -1$ הוא הימצאותן במפגש של תחום עלייה ותחום ירידה. תופעה זו היא כללית: במפגש בין תחום עלייה לתחום ירידה, תמיד תיווצר נקודת מינימום או מקסימום מקומית.

שאלה 25

מצאו את נקודות הקיצון וערכי הקיצון של הפונקציות הבאות:

א. הפונקציה $f(x) = 5 - 2x$ בקטע $[-1, 1]$.

ב. הפונקציה $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$ בקטע $[0, 2]$.

ג. הפונקציה $f(x) = e^x(3 - x)$ בקטע $[0, 3]$.

הערה: מומלץ להיעזר בתוצאות שאלה 24.

התשובה בעמוד 227

שאלה 26

איכר צריך לגדר חצר תרנגולות מלבנית. ברשותו גדר תיל באורך 100 מטר.

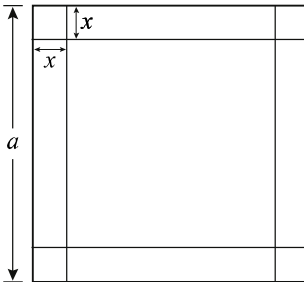
מה צריכים להיות אורך ורוחב החצר, כדי ששטחה יהיה מקסימלי?

התשובה בעמוד 228

שאלה 27

נתון ריבוע קרטון שאורך צלעו a . אם נגזור ונסלק ריבועים שווים מפינותיו ונקפל את שוליו, נוכל לבנות ממנו קופסה (ללא מכסה). נסמן ב- x את גובה הקופסה. מהו הגובה שיעבורו נפח הקופסה הוא מקסימלי?

הערה: הנפח של תיבה מלבנית נתון על ידי הנוסחה: נפח = אורך $\times$ רוחב $\times$ גובה.



התשובה בעמוד 228

הוכחת אי־שוויונות

כהדגמה אחרונה לכוחו של החשבון הדיפרנציאלי, נלמד כיצד ניתן להוכיח אי־שוויונות באמצעותו.

נניח שנתון אי־שוויון מהצורה $f(x) \leq g(x)$, באשר f ו- g הן פונקציות המוגדרות בקטע מסוים I , ואנו מעוניינים לבדוק אם אי־שוויון זה נכון בקטע I .

לצורך כך נגדיר פונקציה חדשה,

$$h(x) = g(x) - f(x)$$

השאלה אם $f(x) \leq g(x)$ לכל $x \in I$, שקולה לשאלה אם $h(x) \geq 0$ לכל $x \in I$.

לפיכך, עלינו לחקור את הפונקציה h , ובמיוחד למצוא את המינימום של h בקטע (בהנחה שהוא קיים) כדי לקבל תשובה לשאלתנו. אם המינימום שלילי – אז יש נקודה בקטע שבה לא מתקיים $f(x) \leq g(x)$. אם המינימום אינו שלילי, אז כל ערכי h בקטע I אינם שליליים, ולפיכך האי־שוויון $f(x) \leq g(x)$ מתקיים בכל הקטע.

נדגים:

א. נוכיח כי לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $e^x \geq 1 + x$:

נתבונן בפונקציה (המוגדרת בכל $\mathbb{R}$)

$$h(x) = e^x - x - 1$$

נגזור אותה:

$$h'(x) = e^x - 1$$

הנגזרת $h'(x)$ מתאפסת בנקודה $x = 0$.

הפונקציה $f(x) = e^x$ עולה (כפי שלמדנו בשיעור 7).

לכן מתקיים $h'(x) < 0$ לכל x שלילי, ו- $h'(x) > 0$ לכל x חיובי.

לפיכך, h יורדת בקטע $(-\infty, 0]$ ועולה בקטע $[0, \infty)$.

הנקודה $x = 0$ היא אפוא נקודת מינימום של h בתחום הגדרתה, ולכל x ממשי

מתקיים:

$$h(x) \geq h(0) = 0$$

הוכחנו את האי־שוויון $e^x - x - 1 \geq 0$, ולפיכך $e^x \geq 1 + x$.

ב. נוכיח כי לכל $x \geq 0$ מתקיים $x^3 > x^2 - 1/5$:

הפעם עלינו להוכיח אי־שוויון חד. נגדיר

$$h(x) = x^3 - x^2 + 1/5$$

נגזור:

$$h'(x) = 3x^2 - 2x = 3x\left(x - \frac{2}{3}\right)$$

בתחום $[0, \infty)$, הנגזרת מתאפסת רק כאשר $x = 0$ או $x = 2/3$. הנגזרת שלילית בקטע

$(0, 2/3)$ וחיובית בקטע $(2/3, \infty)$. לפיכך, h יורדת בקטע $[0, 2/3]$, ועולה בקטע

$[2/3, \infty)$. הנקודה $x = 2/3$ היא, אפוא, נקודת המינימום של h ב- $[0, \infty)$.

לכן מתקיים לכל $x \geq 0$, $h(x) \geq h\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{5} = \frac{7}{135}$.

בפרט, נובע ש- $h(x) > 0$ לכל $x \geq 0$, כלומר:

$$x^3 - x^2 + 1/5 > 0$$

נעביר אגפים ונקבל $x^3 > x^2 - 1/5$, כנדרש.

שאלה 28

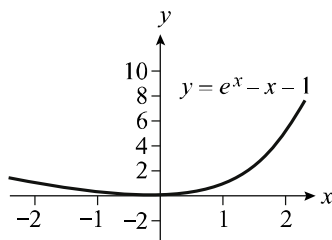
הוכיחו כי לכל $x > 0$ מתקיים $2^x > \frac{x}{2} + 1$.

שאלה 29

א. הוכיחו כי לכל $x > 0$ מתקיים: $\sin x < x$.

ב. הוכיחו כי לכל x ממשי מתקיים $\cos x \geq 1 - x^2/2$.

(הדרכה: הוכיחו תחילה עבור $x \geq 0$. היעזרו בזוגיות הפונקציות).



התשובה בעמוד 229

התשובה בעמוד 229

סיכום שיעור 11

בשיעור זה הכרנו את רעיון הנגזרת. למדנו על משמעות הנגזרת והסיבות להגדרתה, על צורת החישוב של נגזרות, ולבסוף – על השימושים המגוונים שלהן.

עיקר הלימוד הטכני הוקדש לחישוב הנגזרות, מיומנות הדורשת תרגול ובמיוחד בנוגע לכלל השרשרת.

בשיעור זה הרבינו בציון טענות ללא הוכחה, ולעתים אף ללא הגדרות מדויקות, אך אין הדבר אומר שהוכחות והגדרות אלה אינן בנמצא.

בראשיתו של החשבון האינפניטיסימלי התורה אכן לא היתה מבוססת דיה על הגדרות והוכחות. דבר זה עורר פולמוס נרחב, והיו מתמטיקאים שטענו כי תורה זו היא חסרת בסיס ושגויה.

בשלבם מאוחרים יותר, במאות ה-18 וה-19, עבודתם של מתמטיקאים שונים (בין החשובים שבהם אפשר למצוא את קושי, לגראנז', ויירשטראס, קנטור ורימן) ביססה את החשבון האינפניטיסימלי על הגדרות והוכחות מדויקות.

ביסוס מלא זה נלמד בקורסים המוקדשים לחשבון האינפניטיסימלי.

ההיכרות הנרכשת כעת עם הרעיונות המרכזיים של החשבון האינפניטיסימלי ועם והטכניקה המתלווה אליהם תסייע לכם רבות בלימוד עתידי זה.

שאלות להערכה עצמית

שאלה 30

גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = (1+x)^5(2-x)^3$

ב. $f(x) = \frac{8x+1}{6-7x}$

ג. $f(x) = \sqrt[3]{1-2x}$

ד. $f(x) = x^3 \sin x$

ה. $f(x) = \ln^{10} x$

ו. $f(x) = \sqrt{1+\sqrt{x}}$

התשובה בעמוד 230

שאלה 31

מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$

ב. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$

ג. $f(x) = x^5 - x^3 + 1$

התשובה בעמוד 231

שאלה 32

א. מצאו את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = \sin x$ בנקודה $x = \pi/6$.
 ב. מצאו את הנקודות על גרף הפונקציה $f(x) = x^3$ שהישר המשיק בהן לגרף הפונקציה מקביל לישר $2x - 3y = 1$.

התשובה בעמוד 232

שאלה 33

מצאו את המינימום של הפונקציה $f(x) = 2^x - x$ בישר הממשי.

התשובה בעמוד 232

שאלה 34

הוכיחו באינדוקציה את טענה 11.6, בדבר נגזרת הסכום של n פונקציות.

התשובה בעמוד 233

שאלה 35

הוכיחו כי לכל $x \neq 0$ בתחום $(-1, \infty)$ מתקיים $\ln(1+x) < x$.

התשובה בעמוד 234

שיעור 12

חשבון אינטגרלי

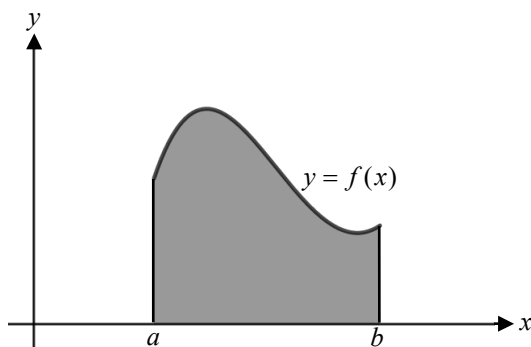
בפתיחת השיעור הקודם הוצגו שלוש בעיות מרכזיות הנפתרות על ידי החשבון האינפיניטסימלי: (א) מציאת המשיק לגרף של פונקציה בנקודה נתונה; (ב) מציאת ערכי המינימום והמקסימום של פונקציה בקטע; (ג) חישוב השטח הכלוא מתחת לגרף של פונקציה בקטע נתון.

שתי הבעיות הראשונות זכו למענה בעזרת מושג הנגזרת. לפתרון הבעיה השלישית נפתח את מושג האינטגרל. אנו נראה שבמובן מסוים, האינטגרל והנגזרת מייצגים שתי פעולות הפוכות זו לזו, ובשל כך יש קשר הדוק ביניהם.

נתבונן בפונקציה f המוגדרת בקטע $[a, b]$. נניח כי ערכי f בקטע זה הם אי-שליליים:

$$\text{לכל } x \in [a, b] \text{ מתקיים } f(x) \geq 0.$$

אנו מעוניינים לחשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה בקטע זה, הישרים $x = a$ ו- $x = b$, וציר ה- x .



$$S = \int_a^b f(x) dx$$

שטח זה מסומן באופן הבא:

הביטוי שבאגף ימין נקרא: **האינטגרל של הפונקציה $f(x)$, מ- a עד b .**

המספרים a ו- b נקראים **גבולות האינטגרציה**.

אינטגרל מסוג זה (שתוצאתו היא מספר) נקרא **אינטגרל מסוים**.

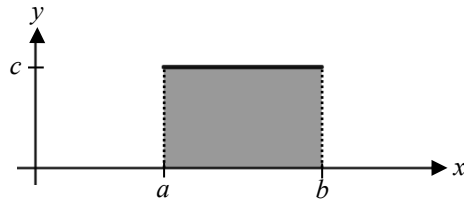
◀ בהמשך השיעור נלמד על אינטגרל מסוג אחר הנקרא **אינטגרל לא מסוים**.

הביטוי dx המופיע בתוך האינטגרל הוא בשלב זה סימון ותו לא. האות d בסימון מייצגת את המילה "דיפרנציאל" והאות x מציינת את משתנה הפונקציה f , הנקרא גם **משתנה האינטגרציה**.

בהמשך תובהר משמעותו של סימון זה והסיבה להיותו חלק מביטוי האינטגרל.

כדי להתרגל לסימון החדש, נחשב את השטח עבור מספר פונקציות פשוטות במיוחד:

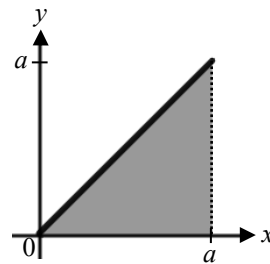
א. נתבונן בפונקציה קבועה, $f(x) = c$. במקרה זה גרף הפונקציה הוא ישר אופקי, והצורה הכלואה מתחתיו בין הישרים $x = a$ ו- $x = b$ היא מלבן:



אורך הצלע האופקית של המלבן הוא $b - a$, ואורך הצלע האנכית הוא c . שטח המלבן הוא מכפלת אורכי צלעותיו. לכן:

$$\int_a^b c dx = c(b - a)$$

ב. נתבונן בפונקציה $f(x) = x$ בקטע $[0, a]$, עבור $a > 0$ כלשהו. גרף הפונקציה הוא ישר היוצר זווית של 45° עם ציר ה- x . הצורה הכלואה מתחתיו בין הישרים $x = 0$ ו- $x = a$ היא משולש ישר-זווית:



אורכי שני הניצבים של המשולש הם a . שטח המשולש הוא מחצית מכפלת אורכי ניצביו. לכן:

$$\int_0^a x dx = \frac{a^2}{2}$$

שאלה 1

חשבו את האינטגרלים הבאים:

א. $\int_2^5 7 dx$

ב. $\int_0^2 3x dx$

ג. $\int_0^2 (2x + 1) dx$

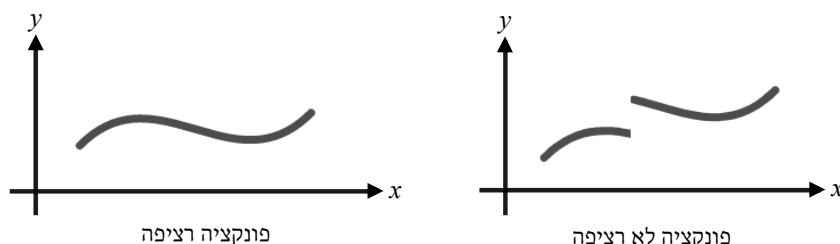
בדוגמאות האחרונות חישבנו אינטגרלים של פונקציות לינאריות בהתבסס על ידיעותינו הגיאומטריות. דרך זו מוגבלת מאוד: לדוגמה, לא נוכל לחשב בה את השטח הכלוא מתחת לגרף הפרבולה $y = x^2$ או הסינוסואידה $y = \sin x$.

בדיון שלהלן, נציג שתי גישות לחישוב השטח מתחת לגרף הפונקציה. בגישה הראשונה, נתבונן בקירוב של הגרף על ידי דיאגרמת עמודות מלבניות. ככל שמספר העמודות יגדל ורוחבן יקטן, כך יתקרב שטח הדיאגרמה אל השטח המבוקש. עיקר חשיבותה של גישה זו יהיה בתרומתה להבנת מושג האינטגרל, משמעויותיו והסימנים הקשורים אליו.

בגישה השנייה, נקשר בין מושג האינטגרל ומושג הנגזרת. קשר זה יפתח את הדרך לחישובים מעשיים רבים.

פונקציות רציפות

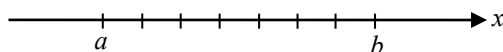
בשתי הגישות שנציג, נגביל את עצמנו לסוג מסוים של פונקציות, הנקראות **פונקציות רציפות**. נאמר שפונקציה המוגדרת בקטע מסוים היא רציפה בו אם הגרף שלה בקטע זה הוא קו רצוף, כלומר, קו הניתן לשרטוט ללא הרמת העיפרון מהנייר.



לא נגדיר את מושג הרציפות באופן מתמטי מדויק, אך נציין שכל פונקציה המוגדרת על ידי תבנית מספר הכוללת את ארבע פעולות החשבון, פעולות החזקה, השורש, הלוגריתם, הערך המוחלט והפונקציות הטריגונומטריות, היא רציפה בכל קטע שבו היא מוגדרת. לכן כל הפונקציות שבהן ניתקל בשיעור זה תהיינה רציפות.

קירוב האינטגרל על ידי שטח דיאגרמת עמודות

נתחיל בתיאור הגישה הראשונה לחישוב האינטגרל. נתונה פונקציה f , המוגדרת בקטע $[a, b]$, רציפה ואי־שלילית בו. יהי n מספר טבעי, ונתבונן בחלוקת הקטע $[a, b]$ ל- n חלקים שווים באורכם:



אורכו של הקטע הוא $b - a$, ולכן אורכו של כל חלק הוא $(b - a)/n$.

$$\Delta x = \frac{b - a}{n} \quad \text{נסמן:}$$

נגדיר את הנקודות הבאות:

$$x_0 = a$$

$$x_1 = a + \Delta x$$

$$x_2 = a + 2\Delta x$$

$$x_3 = a + 3\Delta x$$

$\vdots$

$$x_n = a + n\Delta x = a + n \cdot \frac{b - a}{n} = a + (b - a) = b$$

באופן כללי, לכל $0 \leq i \leq n$ מתקיים:

$$x_i = a + i\Delta x$$

נשים לב שמתקיים

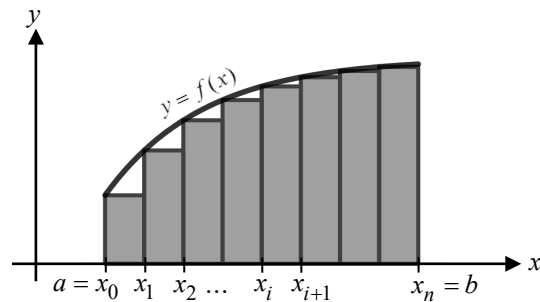
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

הנקודות $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ שייכות לקטע $[a, b]$, ומחלקות אותו ל- n קטעים שאורכם Δx .

נקודות אלה ייקראו **נקודות החלוקה**.

הקטע ה- i בחלוקה זו (עבור $0 \leq i \leq n - 1$) הוא $[x_i, x_{i+1}]$.

כעת, נבנה על כל קטע $[x_i, x_{i+1}]$ שעל ציר ה- x מלבן שגובהו $f(x_i)$:



דיאגרמת המלבנים שהתקבלה מקרבת את הצורה הכלואה מתחת לגרף הפונקציה f . ככל שנגדיל את מספר המלבנים, n , כך יקטן רוחבו של כל מלבן, $\Delta x = (b - a)/n$, והשטח המשותף של כל המלבנים יתקרב אל השטח הכלוא מתחת לגרף הפונקציה.

נחשב את סכום שטחי המלבנים. אורכו של המלבן ה- i (עבור $0 \leq i \leq n - 1$) הוא $f(x_i)$, ורוחבו הוא Δx . סכום שטחי המלבנים הוא

$$f(x_0) \cdot \Delta x + f(x_1) \cdot \Delta x + \dots + f(x_{n-1}) \cdot \Delta x = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot \Delta x$$

כאמור, ככל שנגדיל את n , יתקרב שטח זה לשטח שאותו אנו מבקשים לחשב. לכן יתקיים:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot \Delta x$$

באגף ימין של שוויון זה רשום ביטוי גבול שבו המשתנה n הוא מספר טבעי השואף לאינסוף. כמנהגנו בקורס זה, לא נגדיר במדויק את מושג הגבול מסוג זה, אלא נסתפק בהבנת משמעותו האינטואיטיבית כערך המספרי שאליו מתקרבים המספרים הנתונים ככל ש- n הולך וגדל.

השוויון לעיל מספק את ההסבר המיוחל לפשר הסימן dx שבסימן האינטגרל: עבור כל n טבעי, אנו מסכמים את ערכי הפונקציה f , כשכל ערך $f(x_i)$ מוכפל ברוחב המלבן שהנקודה $(x_i, f(x_i))$ היא אחת מפינותיו.

האינטגרל הוא הערך הגבולי שאליו שואפים ערכי הביטוי שמימין. באופן אינטואיטיבי (וכזה בלבד!) ניתן לחשוב על הקטע $[a, b]$ כמחולק למספר אינסופי של קטעים זעירים שרוחבו של כל אחד מהם הוא הביטוי dx , המציין מספר קטן לאין שיעור, הנקרא "הדיפרנציאל של x ". אורכו של מלבן דמיוני כזה הוא $f(x)$, ושטחו $f(x)dx$.

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

פעולת האינטגרל מסכמת את שטחי המלבנים הזעירים ומניבה מספר:

תיאור זה אמנם שייך למחזות הדמיון, שכן אין בנמצא מספרים "קטנים לאין שיעור". המשמעות המדויקת שלו מגולמת בשוויון

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot \Delta x = \int_a^b f(x)dx$$

אך יש חשיבות בהבנתו האינטואיטיבית, ובתפקידו ההיסטורי בהתפתחות מושגי החשבון האינפיניטסימלי. תיאור זה הוא המקור לסימון האינטגרל: במעבר לגבול, סימון הסכום Σ מוחלף בסימון האינטגרל $\int$, שצורתו כצורתה של אות S מוארכת. אות זו נבחרה על ידי לייבניץ כדי לסמן את המילה "סכום" (באנגלית – Sum, בגרמנית – Summe).

נדגים את חישוב האינטגרל על פי גישה זו.

א. נתבונן בקירוב של האינטגרל $\int_0^1 x dx$, המתקבל מחלוקת הקטע $[0, 1]$ לחמישה חלקים.

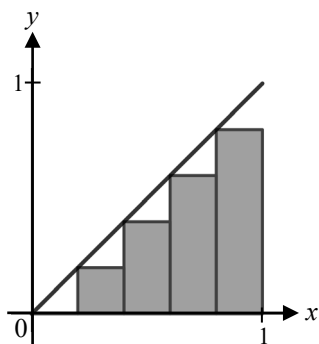
הפונקציה שבנדון היא $f(x) = x$, ואנו מתבוננים בערך $n = 5$.

נקודות החלוקה של הקטע הן:

$$x_0 = 0; \quad x_1 = 0.2; \quad x_2 = 0.4; \quad x_3 = 0.6; \quad x_4 = 0.8; \quad x_5 = 1$$

$$\Delta x = \frac{1}{5}$$

במקרה זה,



$$\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot \Delta x = \Delta x \sum_{i=0}^4 f(x_i) \quad \text{הסכום הוא:}$$

$$= \frac{1}{5} (f(0) + f(0.2) + f(0.4) + f(0.6) + f(0.8))$$

$$= \frac{1}{5} (0 + 0.2 + 0.4 + 0.6 + 0.8) = \frac{2}{5} = 0.4$$

ב. עתה נקרב את האינטגרל $\int_0^1 x dx$ בחלוקת הקטע $[0,1]$ ל**מאה** חלקים.

$$n = 100, \Delta x = \frac{1}{100} \quad \text{במקרה זה}$$

$$x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{100}, x_2 = \frac{2}{100}, \dots, x_{100} = \frac{100}{100} = 1 \quad \text{ונקודות החלוקה הן}$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot \Delta x = \frac{0}{100} \cdot \frac{1}{100} + \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{100} + \dots + \frac{99}{100} \cdot \frac{1}{100} \quad \text{הסכום הוא}$$

$$= \frac{1}{100^2} (1 + 2 + \dots + 99)$$

כדי לחשב את הסכום, ניעזר בנוסחת הסכום של סדרה חשבונית:

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot \Delta x = \frac{1}{100^2} \cdot 99 \cdot \frac{1+99}{2} = \frac{99 \cdot 100}{100^2 \cdot 2} = \frac{99}{200} = 0.495$$

כפי שחישבנו קודם, ערכו המדויק של האינטגרל הוא שטח משולש ישר-זווית שאורכי ניצביו הם 1,1, כלומר

$$\int_0^1 x dx = \frac{1^2}{2} = \frac{1}{2}$$

הגדלת מספר העמודות ל-100 קירבה מאוד את ערך הסכום לערך האינטגרל.

ג. עתה נקרב את האינטגרל $\int_0^1 x dx$ בחלוקת הקטע $[0,1]$ ל- n חלקים, כש- n מספר טבעי

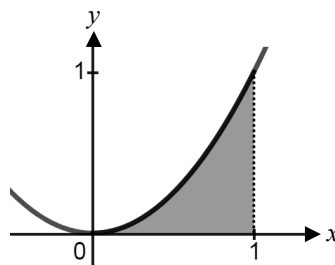
כלשהו. בדומה למקרה הקודם, נקבל:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot \Delta x &= \Delta x \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{n} \\ &= \frac{1}{n} \left(\frac{0}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{n-1}{n} \right) = \frac{1}{n^2} (1 + 2 + \dots + (n-1)) \\ &= \frac{1}{n^2} \frac{(n-1) \cdot n}{2} = \frac{n-1}{2n} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \end{aligned}$$

ככל ש- n הולך וגדל, כך קטן ערך הביטוי $\frac{1}{n}$ ומתקרב ל-0. לכן $1 - \frac{1}{n}$ מתקרב ל-1, וערך

$$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \text{ מתקרב ל-} \frac{1}{2}. \text{ מספר זה הוא אכן האינטגרל המבוקש } \int_0^1 x dx.$$

ד. עתה נתבונן בפונקציה הריבועית $f(x) = x^2$, וננסה לחשב את השטח שמתחת לפרבולה $y = f(x)$ בקטע $[0, 1]$:



שטח זה הוא, כמובן, האינטגרל $\int_0^1 x^2 dx$

נחלק את הקטע $[0, 1]$ ל- n חלקים שווים. אורך כל חלק הוא: $\Delta x = \frac{1}{n}$

נקודות החלוקה הן: $x_i = \frac{i}{n} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n)$

סכום שטחי המלבנים הוא: $\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot \Delta x = \Delta x \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) = \Delta x \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{i}{n}\right)^2$

$$= \frac{1}{n} \left(\left(\frac{0}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \dots + \left(\frac{(n-1)}{n}\right)^2 \right)$$

$$= \frac{1}{n^3} (1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2) = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n-1} i^2$$

בשיעור 5 הוכחנו באינדוקציה את הנוסחה הבאה לסכום ריבועי מספרים עוקבים:

◀ שאלה 17 בשיעור 5

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} i^2 = \frac{(n-1)((n-1)+1)(2(n-1)+1)}{6} = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \quad \text{לכן}$$

הסכום המבוקש הוא:

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot \Delta x = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{2n-1}{2n} = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{1}{2n}\right)$$

ככל ש- n הולך וגדל, מתקרבים ערכי הביטויים $1 - \frac{1}{2n}$ ו- $1 - \frac{1}{n}$ ל-1, וערך הביטוי כולו

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} \quad \text{מתקרב ל-} \frac{1}{3} \text{ לפיכך:}$$

מדוגמאות אלה ניתן לראות ששיטת החישוב של השטח בגישה זו כרוכה בעמל רב, וכוחה מוגבל: היא מצריכה חישוב מדויק של סכומים של ערכי הפונקציה בנקודות שונות.

שאלה 2

נתונה הפונקציה: $f(x) = 1/x$.

חשבו, באופן מקורב, את האינטגרל $\int_1^7 f(x)dx$:

א. על ידי חלוקת הקטע $[1, 7]$ לשלושה חלקים.

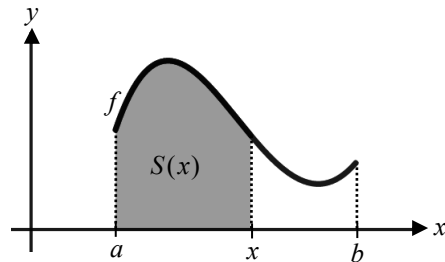
ב. על ידי חלוקת הקטע $[1, 7]$ לשישה חלקים.

התשובה בעמוד 235

האינטגרל והנגזרת

נשוב להתבונן בפונקציה f המוגדרת בקטע $[a, b]$, רציפה ואי־שלילית בו. עבור נקודה $a \leq x \leq b$ נגדיר:

השטח הכלוא מתחת לגרף הפונקציה f בקטע $S(x) = [a, x]$



פונקציה זו נקראת **פונקציית השטח המצטבר**. ביטוייה כאינטגרל הוא

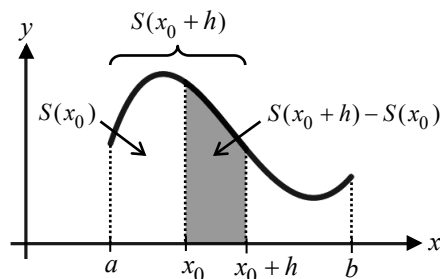
$$S(x) = \int_a^x f(t)dt$$

◁ בחרנו באות החדשה t עבור משתנה האינטגרציה כי האות x כבר מסמנת את משתנה הפונקציה.

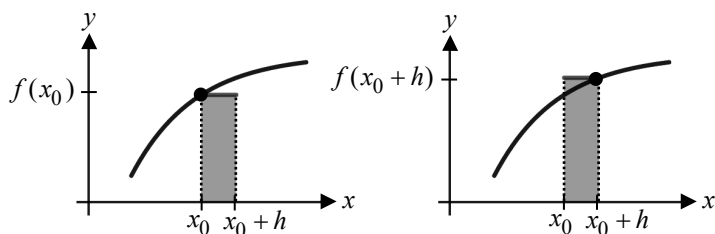
ננסה לחשב את **נגזרת** הפונקציה S :

נתבונן בנקודה x_0 בקטע $[a, b]$, ובמספר $h > 0$. נתבונן בערכים הבאים:

- $S(x_0) =$ השטח שמתחת לגרף הפונקציה f בקטע $[a, x_0]$
 - $S(x_0 + h) =$ השטח שמתחת לגרף הפונקציה f בקטע $[a, x_0 + h]$
- ההפרש בין שני שטחים אלה הוא השטח שמתחת לגרף הפונקציה f בקטע $[x_0, x_0 + h]$.



נניח, למען הפשטות, שהפונקציה f עולה בקטע $[a, b]$. נתבונן בשני המלבנים הבאים:



שני המלבנים בנויים על הקטע $[x_0, x_0 + h]$. אורכו של המלבן הראשון הוא $f(x_0)$, ואורכו של השני $f(x_0 + h)$. השטח שמתחת לגרף הפונקציה בקטע זה נמצא בין שני שטחי המלבנים:

$$f(x_0) \cdot h \leq S(x_0 + h) - S(x_0) \leq f(x_0 + h) \cdot h$$

$$f(x_0) \leq \frac{S(x_0 + h) - S(x_0)}{h} \leq f(x_0 + h) \quad \text{ולכן}$$

משיקולים דומים, ניתן להוכיח שעבור h שלילי מתקיים

$$f(x_0 + h) \leq \frac{S(x_0 + h) - S(x_0)}{h} \leq f(x_0)$$

הביטוי $(S(x_0 + h) - S(x_0))/h$ נמצא, לכן, בין $f(x_0)$ לבין המספר $f(x_0 + h)$ שגם הוא מתקרב ל- $f(x_0)$ ככל ש- h מתקרב ל-0. נקבל אפוא:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(x_0 + h) - S(x_0)}{h} = f(x_0)$$

$$S'(x_0) = f(x_0) \quad \text{כלומר,}$$

שוויון זה הוא הבסיס לחשבון האינטגרלי, שכן הוא מקשר בין מושג האינטגרל לבין מושג הנגזרת. תוקפו של החישוב שערכנו אינו מוגבל לפונקציות עולות, והוא נכון לכל פונקציה רציפה. טענה זו היא תוכנו של המשפט הבא:

משפט 12.1 (המשפט היסודי של החשבון האינפיניטסימלי)

תהי f פונקציה רציפה בקטע $[a, b]$. הנגזרת של פונקציית השטח המצטבר

$$S(x) = \int_a^x f(t) dt$$

היא הפונקציה f עצמה.

משפט זה נותן בידינו רמז עבה לגבי פונקציית השטח המצטבר: נגזרתה שווה לפונקציה המקורית. דבר זה מעלה מיידית את השאלה הבאה:

אם ידועה לנו הנגזרת של פונקציה מסוימת, האם ניתן לדעת מהי הפונקציה?

התשובה לשאלה זו היא "כמעט".

נתבונן, לדוגמה, בשתי הפונקציות הבאות: $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = x^2 + 1$

נגזור אותן: $f_1'(x) = 2x$, $f_2'(x) = 2x$

לשתי הפונקציות יש נגזרת זהה, למרות שהפונקציות שונות.

יחד עם זאת, הפונקציות f_1 ו- f_2 נבדלות זו מזו אך ורק בקבוע:

לכל x מתקיים $f_2(x) = f_1(x) + 1$

המשפט הבא מראה שזה המצב הכללי:

משפט 12.2

תהינה f_1 ו- f_2 פונקציות המוגדרות בקטע מסוים וגזירות בו.

א. אם מתקיים בקטע זה השוויון $f_2(x) = f_1(x) + C$

עבור מספר C קבוע, אז מתקיים השוויון $f_1'(x) = f_2'(x)$ בכל נקודות הקטע.

ב. אם מתקיים בקטע זה השוויון $f_1'(x) = f_2'(x)$

אז קיים קבוע C שעבורו מתקיים השוויון $f_2(x) = f_1(x) + C$ בכל נקודות הקטע.

בניסוח קצר נוכל לבטא את המשפט כך: "לשתי פונקציות יש את אותה הנגזרת אם ורק אם הן נבדלות זו מזו בקבוע חיבורי".

הוכחת המשפט

א. בהינתן השוויון $f_2(x) = f_1(x) + C$, נגזור ונקבל:

$$f_2'(x) = f_1'(x) + 0 = f_1'(x)$$

ב. בהינתן השוויון $f_1'(x) = f_2'(x)$, נתבונן בפונקציית ההפרש:

$$f(x) := f_2(x) - f_1(x)$$

$$f'(x) = f_2'(x) - f_1'(x) = 0$$

לפי משפט 11.18, פונקציה שנגזרתה מתאפסת היא קבועה. לכן קיים C כך שלכל x

$$f(x) = C$$

$$f_2(x) - f_1(x) = C$$

$$\square \quad f_2(x) = f_1(x) + C$$

נעביר אגפים:

פונקציות קדומות

בהינתן פונקציה f , המוגדרת בקטע כלשהו, אם פונקציה F מקיימת בקטע זה $F'(x) = f(x)$, נאמר ש- F היא פונקציה קדומה של f .

משפט 12.2 מראה שפונקציה קדומה אינה יחידה: אם F היא פונקציה קדומה של f , אז לכל C ממשי, גם $G(x) = F(x) + C$ היא פונקציה קדומה של f . אבל, משפט 12.2 מראה גם שכל שתי פונקציות קדומות לפונקציה נתונה נבדלות זו מזו בקבוע חיבורי.

המשפט היסודי של החשבון האינפיניטסימלי (משפט 12.1) מראה שפונקציית השטח המצטבר של פונקציה רציפה f היא פונקציה קדומה של f .

משני המשפטים ביחד, נקבל:

משפט 12.3 (הנוסחה היסודית של החשבון האינפיניטסימלי)

תהי f פונקציה רציפה בקטע $[a, b]$, ותהי F פונקציה קדומה שלה בקטע זה. השטח שמתחת לגרף הפונקציה f הוא

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

הוכחה

תהי $S(x)$ פונקציית השטח המצטבר:

$$S(x) = \int_a^x f(t)dt$$

לפי משפט 12.1, S היא פונקציה קדומה של f . לכן (לפי משפט 12.2) קיים קבוע C כך שמתקיים, לכל x בקטע $[a, b]$,

$$S(x) = F(x) + C$$

בפרט מתקיימים השוויונות:

$$S(a) = F(a) + C$$

$$S(b) = F(b) + C$$

נחסר:

$$S(b) - S(a) = F(b) - F(a)$$

השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה בין הישרים $x = a$ ו- $x = a$ הוא 0, כלומר:

$$S(a) = 0$$

$$\int_a^b f(x)dx = S(b) = S(b) - S(a) = F(b) - F(a)$$

מכאן,

□

כפי שרצינו להוכיח.

נדגים את השימוש בנוסחה היסודית לחישוב אינטגרלים:

א. נחשב את האינטגרל $\int_0^2 (2x+1)dx$

לצורך כך נתבונן בפונקציה $F(x) = x^2 + x$

נגזור את F : $F'(x) = 2x + 1$

F היא פונקציה קדומה של הפונקציה $f(x) = 2x + 1$, הנמצאת בתוך סימן האינטגרל.

לפי המשפט היסודי: $\int_0^2 (2x+1)dx = F(2) - F(0)$

$$= (2^2 + 2) - (0^2 + 0) = 6 - 0 = 6$$

קיבלנו את אותה תוצאה שמצאנו בשאלה 1.

ב. נחשב את האינטגרל: $\int_0^1 x^2 dx$

לצורך כך נתבונן בפונקציה $F(x) = \frac{x^3}{3}$

נגזור את הפונקציה F : $F'(x) = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2$

F היא פונקציה קדומה של הפונקציה $f(x) = x^2$, ולפי המשפט היסודי:

$$\int_0^1 x^2 dx = F(1) - F(0) = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$$

דרך חישוב זה היא קלה וקצרה משמעותית מהדרך שבה חושב אינטגרל זה בעבר.

נציג סימון שימושי לחישובי אינטגרלים באמצעות הנוסחה היסודית:

$$F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

סימון זה מוגדר לכל פונקציה F המוגדרת בנקודות $x = a$ ו- $x = b$.

באמצעותו, נציג את החישובים שערכנו בדוגמאות הקודמות כך:

$$\int_0^2 (2x+1)dx = (x^2 + x) \Big|_0^2 = (2^2 + 2) - (0^2 + 0) = 6$$

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$$

שאלה 3

א. מצאו פונקציה קדומה לפונקציה $f(x) = 3$.

ב. מצאו פונקציה קדומה לפונקציה $f(x) = 2x$.

ג. האם יש עוד פונקציות קדומות לפונקציות בסעיפים א ו-ב?

התשובה בעמוד 236

שאלה 4

באמצעות הפונקציות הקדומות שמצאתם בשאלה 3, חשבו:

א. $\int_3^5 3dx$ ב. $\int_1^5 2x dx$

התשובה בעמוד 236

שאלה 5

חשבו את $\int_0^{10} x^2 dx$.

הדרכה: היעזרו בפונקציה הקדומה $F(x) = x^3/3$.

התשובה בעמוד 236

האינטגרל הלא מסוים

הנוסחה היסודית של החשבון האינפיניטסימלי מראה שחישובן של פונקציות קדומות לפונקציות נתונות הוא המפתח לחישוב האינטגרל המסוים.

ראוי שנציג סימון מתמטי לפונקציה קדומה לפונקציה נתונה. אך עלינו להיות זהירים, כי לפונקציה רציפה נתונה יש יותר מפונקציה קדומה אחת: הפונקציות הקדומות השונות נבדלות זו מזו בקבוע חיבורי.

נסמן ב- $\int f(x) dx$ את משפחת הפונקציות הקדומות לפונקציה נתונה f .

לביטוי זה נקרא האינטגרל הלא מסוים של f .

לדוגמה, נתבונן בפונקציה $f(x) = 2x$.

הפונקציה $F(x) = x^2$ היא פונקציה קדומה של f בכל הישר הממשי.

לפי משפט 12.2, משפחת הפונקציות הקדומות של f היא: $\{x^2 + C \mid C \in \mathbb{R}\}$

נסמן זאת כך: $\int 2x dx = x^2 + C$

שימו לב שהאינטגרל בצד שמאל אינו כולל גבולות. דבר זה מסמן שהאינטגרל אינו אינטגרל מסוים.

המספר C שבאגף הימני נקרא קבוע האינטגרציה.

$$\int 5dx = 5x + C \quad \text{באופן דומה:}$$

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$$

$$\int (x^2 + 2x) dx = \frac{x^3}{3} + x^2 + C$$

בכל אחד מהמקרים נוכל לגזור את אגף ימין כדי לוודא שהוא אכן פונקציה קדומה של הפונקציה בתוך האינטגרל. ואכן:

$$(5x)' = 5$$

$$\left(\frac{x^3}{3}\right)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2$$

$$\left(\frac{x^3}{3} + x^2\right)' = \left(\frac{x^3}{3}\right)' + (x^2)' = x^2 + 2x$$

בגזירה השמטנו מראש את הקבוע C , שנגזרתו שווה לאפס.

שאלה 6

חשבו את האינטגרלים הלא מסוימים הבאים:

התשובה בעמוד 237

$$\text{א. } \int 3dx \quad \text{ב. } \int -2x dx \quad \text{ג. } \int 4x dx \quad \text{ד. } \int 4x^3 dx$$

מטרתנו הבאה היא פיתוח מגוון של כלים לחישוב אינטגרלים לא מסוימים. כלים אלה הם עיקר הטכניקה של החשבון האינטגרלי.

נבהיר מראש שבעיית חישוב האינטגרל הלא מסוים היא קשה יותר מבעיית חישוב הנגזרת, ומצריכה במקרים מסוימים חשיבה יצירתית. הדבר דומה לבעיה של פתרון משוואה: בחישוב פונקציה קדומה לפונקציה נתונה f , אנו פותרים את ה"משוואה" $F' = f$, שבה הנעלם הוא הפונקציה F .

כדי להתמודד עם אתגר זה, נתקדם בשלבים ובכל שלב נרחיב את מגוון הפונקציות שביכולתנו לטפל בהן.

אינטגרל של מכפלת פונקציה בקבוע

הכלל הראשון שנציג מאפשר הוצאה של קבוע כפלי מחוץ לסימן האינטגרל.

טענה 12.4

תהי f פונקציה המוגדרת בקטע מסוים, ויהי c מספר ממשי קבוע.

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad \text{אם}$$

$$\int cf(x) dx = cF(x) + C \quad \text{אז:}$$

הוכחה

אנו מניחים ש- F היא פונקציה קדומה של f בקטע הנתון, לכן $F'(x) = f(x)$ בקטע זה. לפי כלל הגזירה של מכפלת פונקציה בקבוע, $(cF(x))' = cF'(x) = cf(x)$

לכן cF היא פונקציה קדומה של cf , כלומר $\int cf(x)dx = cF(x) + C$ $\square$

באופן מקוצר, ננסח כלל זה כך: $\int cf(x)dx = c \int f(x)dx$

ניסוח זה אינו לוקח בחשבון את הקבוע החיבורי C ; אך מובן שנוסיף אותו תמיד בסוף כל חישוב של אינטגרל לא מסוים.

דוגמאות:

א. מהאינטגרל $\int 2x dx = x^2 + C$

נקבל מיידית: $\int 6x dx = \int 3 \cdot (2x) dx = 3 \int 2x dx = 3x^2 + C$

בחישוב זה הכפלנו את המספר 3 בפונקציה הקדומה x^2 , וכך קיבלנו פונקציה קדומה של הפונקציה $6x$. לתוצאה זו הוספנו את הקבוע C . כאמור, כך יש לנהוג בכל חישוב אינטגרל לא מסוים: הוספת הקבוע מתבצעת רק לאחר מציאת הפונקציה הקדומה.

ב. $\int -2x dx = \int (-1) \cdot 2x dx = (-1) \cdot \int 2x dx = -x^2 + C$

שאלה 7

בהסתמך על האינטגרל $\int 4x^3 dx = x^4 + C$, חשבו:

א. $\int 8x^3 dx$ ב. $\int -4x^3 dx$ ג. $\int x^3 dx$

התשובה בעמוד 237

האינטגרל $\int x^n dx$

יהי $n \geq 0$ מספר שלם. נחשב את האינטגרל $\int x^n dx$:

נתבונן תחילה בנגזרת $(x^{n+1})' = (n+1)x^n$

ממנה מתקבל האינטגרל $\int (n+1)x^n dx = x^{n+1} + C$

עתה, נבטא $x^n = \frac{1}{n+1} \cdot (n+1)x^n$

ונקבל: $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} \int (n+1)x^n dx$

כלומר: $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

$$\int 1 dx = x + C \quad \text{בפרט:}$$

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$$

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$$

$$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$$

וכן הלאה.

אינטגרל של סכום והפרש פונקציות

מתוך כללי הגזירה של סכום והפרש פונקציות נקבל מיידית כלל לאינטגרל של סכום או הפרש:

12.5 טענה

תהינה f ו- g פונקציה המוגדרות בקטע מסוים.

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \quad \int g(x) dx = G(x) + C, \quad \text{אם}$$

$$\int (f(x) + g(x)) dx = F(x) + G(x) + C \quad \text{אז}$$

$$\int (f(x) - g(x)) dx = F(x) - G(x) + C \quad \text{וגם:}$$

הוכחה

מההנחות נובע שלכל x בקטע הנתון מתקיים: $F'(x) = f(x)$, $G'(x) = g(x)$
לפי כללי הגזירה של סכום והפרש פונקציות, נסיק:

$$(F + G)'(x) = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x)$$

$$(F - G)'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - g(x) \quad \text{וכן}$$

לכן הפונקציה $F + G$ היא פונקציה קדומה של $f + g$, והפונקציה $F - G$ היא פונקציה קדומה של $f - g$, כפי שרצינו להוכיח. $\square$

באופן מקוצר ניתן לכתוב כללים אלה כך:

$$\boxed{\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx}$$

$$\boxed{\int (f(x) - g(x)) dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx}$$

ניתן להכליל את הכלל לגבי אינטגרל של סכום, לסכום של מספר כלשהו של פונקציות:

$$\int (f_1(x) + \dots + f_n(x)) dx = \int f_1(x) dx + \dots + \int f_n(x) dx$$

הוכחת כלל זה היא באינדוקציה, בדומה להוכחת הכלל לגזירת סכום של n פונקציות.

נדגים את השימוש בכללים אלה:

א. נחשב את $\int (x^2 - 3x) dx$:

$$\begin{aligned}\int (x^2 - 3x) dx &= \int x^2 dx - \int 3x dx \\ &= \int x^2 dx - 3 \int x dx = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + C\end{aligned}$$

באופן מקוצר יותר נבטא חישוב זה כך:

$$\int (x^2 - 3x) dx = \int x^2 dx - 3 \int x dx = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + C$$

ברישום זה השתמשנו בבת אחת בכללי האינטגרל של סכום ושל מכפלת פונקציה בקבוע.

ב. נחשב את $\int (2x^{10} - 3x^5 + 1) dx$:

$$\begin{aligned}\int (2x^{10} - 3x^5 + 1) dx &= \int 2x^{10} dx + \int (-3x^5) dx + \int 1 dx \\ &= 2 \int x^{10} dx + (-3) \int x^5 dx + \int 1 dx \\ &= \frac{2x^{11}}{11} - \frac{3x^6}{6} + x + C = \frac{2x^{11}}{11} - \frac{x^6}{2} + x + C\end{aligned}$$

ברישום מקוצר יותר:

$$\begin{aligned}\int (2x^{10} - 3x^5 + 1) dx &= 2 \int x^{10} dx - 3 \int x^5 dx + \int 1 dx \\ &= \frac{2x^{11}}{11} - \frac{3x^6}{6} + x + C = \frac{2x^{11}}{11} - \frac{x^6}{2} + x + C\end{aligned}$$

הכללים שלמדנו עד לשלב זה מאפשרים לחשב אינטגרל של כל פולינום $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$.

נתרגל זאת:

שאלה 8

חשבו את האינטגרלים הבאים:

א. $\int (x^5 - 1) dx$	ב. $\int (8 - x) dx$	ג. $\int 0 dx$
ד. $\int (x^2 + 8x + 7) dx$	ה. $\int (x^{50} + x^2 - 8) dx$	ו. $\int (x + 2)^3 dx$
ז. $\int \frac{x^3 - 1}{x - 1} dx$	ח. $\int (x + 1)(x + 3) dx$	

התשובה בעמוד 237

אינטגרל של פונקציות חזקה ושורש

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}, \text{ הכלל שהוכחנו,}$$

כוחו יפה גם עבור n שלם שלילי, כל עוד $n \neq -1$. ההוכחה היא מיידית על ידי גזירה:

$$\left(\frac{1}{n+1} x^{n+1} \right)' = \frac{1}{n+1} (n+1) x^n = x^n$$

השוני היחיד מהכלל שהכרנו עבור n טבעי הוא בתחום ההגדרה של הפונקציות: עבור n שלילי מוגדרות הפונקציות עבור $x \neq 0$ בלבד; ובהתאם, הפונקציות הקדומות הן קדומות בתחום זה.

$$\int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = \frac{1}{(-2)+1} x^{((-2)+1)} + C = \frac{-1}{x} + C \quad \text{מכלל זה נקבל:}$$

$$\int x^r dx = \frac{1}{r+1} x^{r+1} + C \quad \text{באופן דומה, נקבל עבור } r \neq -1 \text{ ממשי כלשהו,}$$

במקרה זה מוגדרות הפונקציות והפונקציות הקדומות עבור $x > 0$.

בפרט נקבל, עבור $x = 1/2$:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x} dx &= \int x^{1/2} dx = \frac{1}{1+(1/2)} x^{1+(1/2)} + C = \frac{1}{3/2} x^{3/2} + C \\ &= \frac{2}{3} x^{3/2} + C = \frac{2}{3} x \sqrt{x} + C \end{aligned}$$

שאלה 9

חשבו את האינטגרלים הבאים:

$$\text{א. } \int \frac{1}{x^5} dx \quad \text{ב. } \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx \quad \text{ג. } \int \frac{-2\sqrt{x} + 5}{x^2} dx$$

התשובה בעמוד 238

אינטגרלים מידיים

נעבור לחישוב של אינטגרלים נוספים.

מתוך כל נגזרת שאנו מכירים, $f'(x) = g(x)$, מתקבל אינטגרל לא מסוים:

$$\int g(x) dx = f(x) + C$$

בדרך זו נקבל שורה של אינטגרלים, הנקראים אינטגרלים מידיים:

$$\boxed{\int \cos x dx = \sin x + C} \quad \text{א. מנוסחת הגזירה } \sin'(x) = \cos x \text{ נסיק מיידית:}$$

$$\boxed{\int (-\sin x) dx = \cos x + C} \quad \text{ב. מנוסחת הגזירה } \cos'(x) = -\sin x \text{ נסיק:}$$

$$\boxed{\int \sin x dx = -\cos x + C} \quad \text{ולכן:}$$

ג. מנוסחאות הגזירה $\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, $\cot'(x) = \frac{-1}{\sin^2 x}$

נסיק: $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$, $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$

ד. מהנוסחה $(e^x)' = e^x$

נסיק: $\int e^x dx = e^x + C$

ה. כללית יותר, לכל $a > 0$ המקיים $a \neq 1$, מהנוסחה: $(a^x)' = a^x \ln a$

נסיק $\int a^x \ln a dx = a^x + C$

ולכן: $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

ו. עתה נתבונן בנגזרת: $\ln'(x) = \frac{1}{x}$

ממנה נסיק: $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$

כוחו של אינטגרל זה יפה בקטע $(0, \infty)$, תחום הגדרת הפונקציה $\ln$. נרצה למצוא פונקציה קדומה לפונקציה $f(x) = 1/x$ גם בקטע $(-\infty, 0)$. לצורך כך נתבונן בפונקציה הבאה: $G(x) = \ln(-x)$ פונקציה זו מוגדרת בקטע $(-\infty, 0)$. נגזרתה היא, לפי כלל השרשרת:

$$G'(x) = \ln'(-x) \cdot (-1) = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$$

הפונקציה G שהגדרנו היא, אפוא, הפונקציה הקדומה המבוקשת. קיבלנו שבקטע $(0, \infty)$ הפונקציה $F(x) = \ln x$ היא פונקציה קדומה ל- $f(x) = 1/x$, ובקטע $(-\infty, 0)$ הפונקציה $G(x) = \ln(-x)$ היא פונקציה קדומה לפונקציה זו.

נכתוב זאת בקיצור בנוסחה הבאה: $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$

נתרגל את השימוש באינטגרלים המידיים.

שאלה 10

חשבו:

א. $\int (\sin x + \cos x) dx$ ב. $\int \frac{2}{\cos^2 x} dx$ ג. $\int 3^x dx$

ד. $\int 5^{2x+1} dx$ ה. $\int \left(x + \frac{1}{x}\right) dx$ ו. $\int \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 dx$

ז. $\int \tan^2 x dx$

התשובה בעמוד 239

כלל ההצבה

כללי הגזירה שפיתחנו הם מעין תמונת מראה של כללי הגזירה: כל כלל גזירה מניב כלל אינטגרציה המקביל לו. נמשיך בדרך זו ונפתח את הכלל המקביל לכלל השרשרת.

טענה 12.6 (כלל ההצבה)

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad \text{אם}$$

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C \quad \text{אז}$$

הוכחה

נגזור את הפונקציה באגף ימין, לפי כלל השרשרת:

$$(F(g(x)))' = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)$$

$$\square \quad \int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C \quad \text{לכן:}$$

בניסוח ובהוכחת הטענה לא ציינו במדויק את התנאים שהפונקציות F , f ו- g נדרשות לקיים; שומה עלינו לבדוק בכל שימוש בכלל זה שתנאי כלל השרשרת אכן מתקיימים.

$$\int e^{\sin x} \cos x dx \quad \text{נדגים זאת בחישוב האינטגרל הבא:}$$

באינטגרל זה אנו מזוהים ש- $\cos x$ היא הנגזרת של הפונקציה $\sin x$. לכן נוכל לבטא את הביטוי שבאינטגרל כך:

$$e^{\sin x} \cos x = f(g(x))g'(x)$$

$$f(x) = e^x, g(x) = \sin x \quad \text{עם הפונקציות}$$

$$\int f(x)dx = \int e^x dx = e^x + C \quad \text{נמצא פונקציה קדומה של הפונקציה } f:$$

כלומר, הפונקציה $F(x) = e^x$ היא פונקציה קדומה של f .

$$\int e^{\sin x} \cos x dx = F(g(x)) = e^{\sin x} + C \quad \text{נקבל:}$$

$$(e^{\sin x})' = e^{\sin x} \cdot \sin'(x) = e^{\sin x} \cos x \quad \text{נגזור ונוודא:}$$

אכן, מצאנו פונקציה קדומה לפונקציה $f(x) = e^{\sin x} \cos x$.

$$\int \sin^5 x \cos x dx \quad \text{כדוגמה נוספת, נתבונן באינטגרל}$$

גם כאן נזהה שהפונקציה $\cos x$ היא נגזרת הפונקציה $\sin x$. נוכל לבטא את האינטגרל כך:

$$\int f(g(x))g'(x)dx$$

$$f(x) = x^5, g(x) = \sin x \quad \text{עם הפונקציות}$$

$$\int f(x)dx = \int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + C \quad \text{נמצא תחילה פונקציה קדומה לפונקציה } f:$$

הפונקציה $F(x) = x^6/6$ היא פונקציה קדומה של f , ולכן

$$\int \sin^5 x \cos x dx = F(g(x)) + C = \frac{\sin^6 x}{6} + C$$

$$\left(\frac{\sin^6 x}{6}\right)' = \frac{1}{6} \cdot 6 \sin^5 x \cdot (\sin x)' = \sin^5 x \cos x \quad \text{נגזור ונוודא:}$$

אכן מצאנו פונקציה קדומה כנדרש.

שאלה 11

חשבו:

$$\begin{array}{lll} \text{א. } \int \sin(x^2) \cdot 2x dx & \text{ב. } \int e^x \sin(e^x) dx & \text{ג. } \int x e^{x^2} dx \\ \text{ד. } \int 3 \sin(3x) dx & \text{ה. } \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx & \text{ו. } \int (1+x^2)^3 \cdot 2x dx \end{array}$$

התשובה בעמוד 239

הערה: יש דרכים מתקדמות יותר לשימוש בכלל ההצבה, המאפשרות ביצוע של **חילוף משתנה** באינטגרל. לא נלמד אותן בקורס הזה.

אינטגרציה של הפונקציות $\tan, \cot$

לחישוב אינטגרל הפונקציה $f(x) = \cot x$, נציג אותה כך:

$$f(x) = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\sin x} \cdot \sin'(x)$$

$$f(x) = h(\sin x) \sin'(x) \quad \text{נגדיר: } h(x) = 1/x \text{ ונקבל}$$

$$\int h(x) dx = \ln|x| + C \quad \text{נחשב את אינטגרל הפונקציה } h$$

$$\text{לכן } H(x) = \ln|x| \text{ היא פונקציה קדומה של } h.$$

$$\int \cot x dx = H(\sin x) + C \quad \text{לפי כלל ההצבה:}$$

$$\boxed{\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C} \quad \text{כלומר:}$$

עתה נתבונן בפונקציה $g(x) = \tan x$. נציג אותה כך:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) \cdot (-1) = -h(\cos x) \cos'(x)$$

$$\triangleleft \text{כמקודם, } h(x) = 1/x.$$

$$\int \tan x dx = -H(\cos x) + C \quad \text{לפי כלל ההצבה:}$$

$$\boxed{\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C} \quad \text{כלומר:}$$

הצבה לינארית

מקרה פרטי חשוב של כלל ההצבה הוא הכלל הבא:

טענה 12.7 (כלל ההצבה הלינארית)

בהינתן a, b מספרים קבועים, כך ש- $a \neq 0$,

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad \text{אם}$$

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C \quad \text{אז}$$

הוכחה

$$g(x) = ax + b \quad \text{נגדיר:}$$

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C = F(ax+b) + C \quad \text{לפי נוסחת ההצבה,}$$

$$g'(x) = a \quad \text{הנגזרת של } g \text{ היא פונקציה קבועה:}$$

$$\int a \cdot f(g(x))dx = F(ax+b) + C \quad \text{לכן}$$

$$\int f(g(x))dx = \frac{1}{a} \int a \cdot f(g(x))dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C \quad \text{מכאן,}$$

$$\square \quad \int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C \quad \text{כלומר,}$$

דוגמאות

$$\text{א. נחשב את } \int \cos(2x)dx :$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C \quad \text{נחשב תחילה}$$

$$f(x) = \cos x, a = 2, b = 0 \triangleleft$$

$$\int \cos(2x)dx = \frac{1}{2}\sin(2x) + C \quad \text{לכן,}$$

$$\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)' = \left(\frac{1}{2}\cos 2x\right) \cdot 2 = \cos 2x \quad \text{נוודא על ידי גזירה:}$$

$$\text{ב. נחשב את } \int \sqrt{1-2x}dx :$$

$$\int \sqrt{x}dx = \int x^{1/2}dx = \frac{1}{3/2}x^{3/2} + C = \frac{2}{3}x^{3/2} + C \quad \text{נחשב תחילה}$$

$$f(x) = \sqrt{x}, a = -2, b = 1 \triangleleft$$

$$\int \sqrt{1-2x}dx = \frac{1}{-2} \cdot \frac{2}{3}(1-2x)^{3/2} + C = \frac{-(1-2x)^{3/2}}{3} + C \quad \text{לכן:}$$

נוודא על ידי גזירה, לפי כלל השרשרת:

$$\left(\frac{-(1-2x)^{3/2}}{3}\right)' = \frac{-1}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot (1-2x)^{1/2} \cdot (-2) = \sqrt{1-2x}$$

$\triangleleft -2$ הוא נגזרת הפונקציה הפנימית $g(x) = 1 - 2x$.

שאלה 12

חשבו:

א. $\int \cos 4x dx$

ב. $\int \frac{1}{1-x} dx$

ג. $\int \tan 8x dx$

ד. $\int (7x+1)^{10} dx$

ה. $\int \sqrt{x+1} dx$

ו. $\int \frac{1}{(5x+1)^2} dx$

התשובה בעמוד 240

אינטגרציה בחלקים

הכלל לגזירת מכפלת פונקציות הוא: $(fg)' = f'g + fg'$ (*)
מכלל זה נקבל כלל אינטגרציה, הנקרא **אינטגרציה בחלקים**.
כדי לפתחו, נכתוב את כלל המכפלה בצורה הבאה:

$$\int (f'(x)g(x) + f(x)g'(x)) dx = f(x)g(x) + C$$

לפי כלל האינטגרל של סכום פונקציות:

$$\int f'(x)g(x) dx + \int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) + C$$

$$\boxed{\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx}$$

בהעברת אגפים, נקבל:

(הערה: אין צורך בקבוע C בשוויון האחרון, כי האינטגרל באגף ימין מבהיר ששני האגפים כוללים הוספת קבוע חיבורי).

הנוסחה שקיבלנו נקראת **נוסחת האינטגרציה בחלקים**. נוסחה זו מאפשרת, במקרים מסוימים, להמיר בעיית אינטגרציה קיימת בבעיית אינטגרציה אחרת, קלה יותר.

דוגמאות:

א. נחשב את $\int x \cos x dx$.

כדי לעשות זאת, נתבונן בפונקציות הבאות:

$$f(x) = x, \quad g(x) = \sin x$$

פונקציות אלה נבחרו כך שאחת מהן ($f(x)$) היא אחד הגורמים במכפלה שבאינטגרל, והשנייה ($g(x)$) היא פונקציה קדומה של הגורם השני במכפלה.

$$x \cos x = f(x)g'(x) \quad \text{מבחירה זו נובע:}$$

$$\begin{aligned} \int x \cos x dx &= \int f(x)g'(x) dx, \quad \text{לפי נוסחת האינטגרציה בחלקים,} \\ &= f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx = x \sin x - \int (1 \cdot \sin x) dx \\ &= x \sin x - (-\cos x) + C = x \sin x + \cos x + C \end{aligned}$$

נוודא על ידי גזירה:

$$(x \sin x + \cos x)' = \sin x + x \cos x + (-\sin x) = x \cos x$$

ב. עתה נחשב את האינטגרל $\int \ln x dx$.

הפונקציה $\ln$ אמנם לא מוצגת כמכפלה, אך נציג אותה באופן הבא:

$$\ln x = \ln x \cdot 1$$

$$f(x) = \ln x, g(x) = x \quad \text{נגדיר:}$$

$$\ln x = f(x)g'(x) \quad \text{ונקבל}$$

$$\int \ln x dx = \int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx \quad \text{לכן}$$

$$= (\ln x) \cdot x - \int \frac{1}{x} \cdot x dx = x \ln x - \int 1 dx = x \ln x - x + C$$

$$(x \ln x - x)' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \ln x \quad \text{נוודא על ידי גזירה:}$$

מדוגמאות אלה ניתן לראות ששימוש מוצלח בכלל האינטגרציה בחלקים מותנה בזיהוי נכון של ביטוי מהצורה $f'g$. נוסחת האינטגרציה בחלקים מחליפה את בעיית האינטגרציה של $f'g$ בבעיית האינטגרציה של $f'g$. במצב שבו f היא פולינום, תהיה f' פולינום ממעלה נמוכה יותר, ולכן יש סיכוי שהביטוי $f'g$ כולו יהיה קל יותר לאינטגרציה מהביטוי $f'g$. על כך התבסס החישוב בדוגמה הראשונה, ועל כך תוכלו לבסס את החישוב גם בתרגילים שלהלן.

שאלה 13

חשבו:

$$\text{א. } \int x \cos x dx \quad \text{ב. } \int x e^x dx \quad \text{ג. } \int x \sin 2x dx \quad \text{ד. } \int x^2 \sin x dx$$

התשובה בעמוד 241

סיכום נושא האינטגרל הלא מסוים

בסעיפים האחרונים רכשנו מגוון של כלים לחישוב אינטגרלים לא מסוימים. בהינתן בעיית אינטגרציה, לפעמים ניתן לראות באופן מיידי מהו הכלי שיעזור לפתרונה, ולפעמים יש לנסות ולשלב כלים שונים. יש לקחת בחשבון כי לא תמיד הפונקציה מוצגת בצורה המתאימה מיידי ליישום הכלל, ולעיתים יש להציגה בצורה המאפשרת את יישומה.

לדוגמה, בהינתן הפונקציה $f(x) = 5x^2 e^{4x^3}$ נציג אותה תחילה באופן הבא:

$$f(x) = e^{4x^3} \cdot 12x^2 \cdot \frac{5}{12} = e^{4x^3} \cdot (4x^3)' \cdot \frac{5}{12}$$

$$\int f(x) dx = \frac{5}{12} e^{4x^3} + C \quad \text{מהצגה זו נקבל, לפי נוסחת ההצבה:}$$

סיכום כללי האינטגרציה

ברשימה הבאה מרוכזים כללי האינטגרציה שפיתחנו:

$$\int (cf(x))dx = c \int f(x)dx \quad \text{אינטגרל של מכפלת פונקציה בקבוע:}$$

אינטגרל של סכום או הפרש פונקציות:

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$\int (f(x) - g(x))dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$$

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C \quad \text{כלל ההצבה:}$$

$$\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a}F(ax + b) + C \quad \text{כלל ההצבה הלינארית (} a \neq 0 \text{):}$$

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx \quad \text{אינטגרציה בחלקים:}$$

אינטגרלים של פולינומים ופונקציות חזקה:

$$\int 0dx = C$$

$$\int 1dx = x + C$$

$$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \quad (r \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

אינטגרלים של פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות:

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq -1)$$

$$\int \ln x dx = x \ln x - x + C$$

אינטגרלים של פונקציות טריגונומטריות:

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C$$

$$\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$$

בשאלה הבאה נתרגל את טכניקות האינטגרציה השונות.

שאלה 14

חשבו:

$$\begin{array}{ll} \text{א. } \int (x^3 - 5x^2 + 7x + 1) dx & \text{ב. } \int e^{-x} dx \\ \text{ג. } \int \frac{\ln^2 x}{x} dx & \text{ד. } \int \tan(5x) dx \\ \text{ה. } \int \frac{2 \sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx & \text{ו. } \int (\log_a x) dx \\ \text{ז. } \int x^7 (1 - x^8)^8 dx & \text{ח. } \int \frac{x+2}{x-2} dx \end{array}$$

התשובה בעמוד 242

בחזרה לאינטגרל המסוים

לאחר שלמדנו כיצד לחשב את האינטגרל הלא מסוים עבור מגוון רחב של פונקציות, ניישם את הידע בחישובי אינטגרלים מסוימים.

כזכור, בהינתן פונקציה $f(x)$ שהיא מוגדרת, רציפה ואישלילית בקטע $[a, b]$, האינטגרל

$$\int_a^b f(x) dx \quad \text{המסוים}$$

מבטא את השטח שמתחת לגרף הפונקציה f בקטע $[a, b]$.

לפי הנוסחה היסודית של החשבון האינפיניטסימלי, בהינתן פונקציה קדומה F לפונקציה

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad f \text{ בקטע, מתקיים}$$

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad \text{לכן אם חישבנו את האינטגרל הלא מסוים}$$

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b \quad \text{נקבל:}$$

נדגים:

א. נחשב את השטח מתחת לפרבולה $y = x^2 + 2x$ בקטע $[2, 6]$:

$$S = \int_2^6 (x^2 + 2x) dx = \left(\frac{x^3}{3} + x^2 \right) \Big|_2^6 = \left(\frac{6^3}{3} + 6^2 \right) - \left(\frac{2^3}{3} + 2^2 \right) = 101 \frac{1}{3}$$

ב. נחשב את השטח שמתחת לגרף פונקציית הסינוס בקטע $[0, \pi]$:

$$S = \int_0^\pi \sin x dx = (-\cos x) \Big|_0^\pi = -\cos \pi - (-\cos 0) = -(-1) - (-1) = 2$$

ועכשיו חשבו אתם:

שאלה 15

א. חשבו את השטח מתחת לעקום $y = 2^x$ עבור $0 \leq x \leq 3$.

ב. חשבו את $\int_{-1}^1 (x^6 + 12x^2) dx$.

ג. חשבו את $\int_1^e \ln x dx$.

ד. חשבו את $\int_1^4 \sqrt{x} dx$.

התשובה בעמוד 243

עוד על האינטגרל המסוים

הגדרת האינטגרל המסוים $\int_a^b f(x) dx$ כשטח הכלוא מתחת לגרף הפונקציה f בקטע

$[a, b]$ היתה מוגבלת למצב שבו ערכי f הם אי־שליליים בקטע זה.

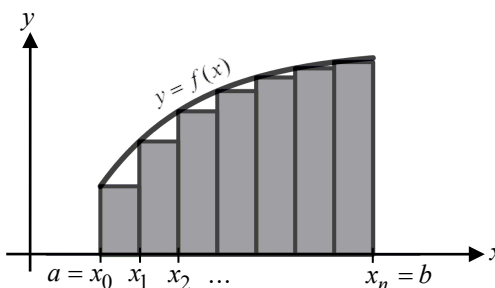
בתחילת השיעור למדנו את הנוסחה

$$(*) \quad \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot \Delta x$$

בנוסחה זו, הנקודות $x_0, x_1, \dots, x_n$ היו חלוקה של הקטע $[a, b]$ ל- n חלקים שווים,

ו- $\Delta x = (b - a)/n$ היה אורכו של כל חלק. הסכום $\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot \Delta x$ ביטא שטח של

דיאגרמת עמודות המקרבת את גרף הפונקציה f :



ניתן להוכיח שהגבול באגף ימין קיים עבור כל פונקציה רציפה f , יהיו ערכיה אשר יהיו.

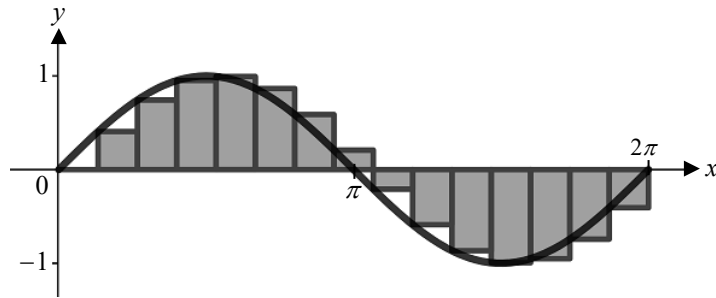
נקבל מעתה את הנוסחה (*) כנקודת המוצא להגדרת האינטגרל של פונקציה רציפה כלשהי.

הגדרה זו אינה מוגבלת לפונקציות אי־שליליות. בנוסף, הגדרה זו מצביעה על כך שלאינטגרל

יש משמעות רחבה יותר מאשר השטח: משמעות של צבירת כמות המוגדרת על ידי

הפונקציה f . ערכי הפונקציה נצברים, כמובן, בהתאם לסימנם.

באיור הבא מודגם חישוב הסכום עבור פונקציית הסינוס בקטע $[0, 2\pi]$, עם $n = 15$.



נכיר מספר תכונות של האינטגרל בהגדרתו המורחבת:

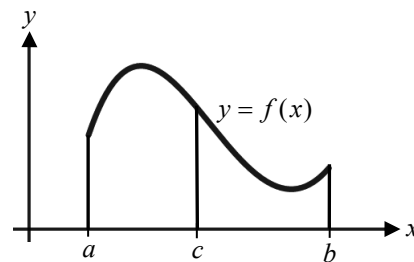
א. אם פונקציה f מקבלת ערכים אי-שליליים בקטע, האינטגרל $\int_a^b f(x)dx$ שווה לשטח המוגבל בין גרף הפונקציה לבין ציר ה- x : עובדה זו ידועה לנו זה מכבר.

ב. אם פונקציה f מקיימת $f(x) \leq 0$ בכל נקודות הקטע, האינטגרל $\int_a^b f(x)dx$ שווה למינוס השטח המוגבל בין גרף הפונקציה לבין ציר ה- x . האינטגרל יכול להיות, אפוא, שלילי.

ג. לכל $a \leq c \leq b$ מתקיים השוויון:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

עבור פונקציה אי-שלילית ניתן להבין אי-שוויון זה מהאיור הבא:



השטח שמתחת לגרף הפונקציה f בקטע $[a, b]$ מחולק לשני חלקים על ידי הישר $x = c$; שטחי חלקים אלה מבוטאים על ידי אחד האינטגרלים $\int_a^c f(x)dx$, $\int_c^b f(x)dx$.

ד. כללית יותר, בהינתן חלוקה של הקטע $[a, b]$ לתת-קטעים על ידי הנקודות

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n = b$$

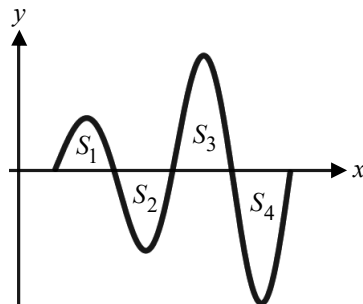
ניתן לבטא את האינטגרל $\int_a^b f(x)dx$ כסכום האינטגרלים של הפונקציה f

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$$

בתת-קטעים השונים:

ה. מהתכונות א-ד נובע, בפרט, שאם הקטע $[a, b]$ מחולק לתחומים שבכל תחום הפונקציה f שומרת על סימן קבוע, האינטגרל $\int_a^b f(x)dx$ הוא ההפרש בין סכום השטחים המוגבלים על ידי חלקי הגרף שמעל לציר ה- x , לבין סכום השטחים המוגבלים על ידי חלקי הגרף שמתחתיו.

לדוגמה:



$$\int_a^b f(x)dx = (S_1 + S_3) - (S_2 + S_4)$$

באיור זה מתקיים

ו. המשפט היסודי של החשבון האינפיניטסימלי, והנוסחה היסודית, תקפים עבור האינטגרל גם בהגדרתו הכללית. לכן, בהינתן פונקציה קדומה F לפונקציה רציפה f

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

בקטע $[a, b]$, מתקיים:

נחשב, לדוגמה, את האינטגרל $\int_0^{2\pi} \sin x dx$:

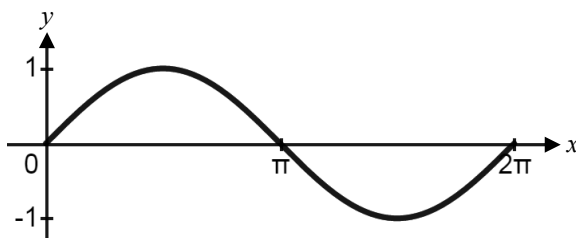
$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

האינטגרל הלא מסוים הוא

ולכן

$$\int_0^{2\pi} \sin x dx = (-\cos x)|_0^{2\pi} = (-\cos 2\pi) - (-\cos 0) = (-1) - (-1) = 0$$

ניתן לראות שגרף פונקציית הסינוס בקטע מורכב משני חלקים, האחד מעל לציר ה- x והשני מתחתיו; שטחו של כל חלק הוא 2 (ראו חישוב בעמוד 150). האינטגרל שווה להפרש השטחים ולכן מתאפס.



שאלה 16

נתונה הפונקציה $f(x) = 2 - x$.

א. חשבו את האינטגרל $\int_0^3 f(x) dx$.

ב. איזה חלק של גרף הפונקציה בקטע $[0, 3]$ נמצא מעל ציר ה- x , ואיזה חלק נמצא מתחתיו?

ג. חשבו את השטח הכלוא בין חלק גרף הפונקציה שמעל ציר ה- x , לציר ה- x .

ד. חשבו את השטח הכלוא בין חלק גרף הפונקציה שמתחת לציר ה- x , לציר ה- x .

ה. ודאו כי הפרש השטחים שקיבלתם בסעיפים ג, ד הוא האינטגרל $\int_0^3 f(x) dx$.

התשובה בעמוד 243

שאלה 17

א. חשבו את האינטגרל $\int_{-2}^1 |x| dx$.

הדרכה: חלקו את הקטע $[-2, 1]$ לקטעים $[-2, 0]$ ו- $[0, 1]$.

ב. חשבו את האינטגרל $\int_0^1 |2 - 3x| dx$.

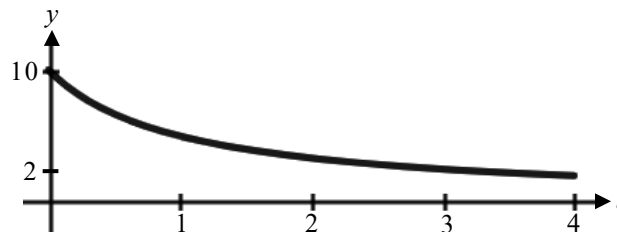
התשובה בעמוד 244

משמעויות נוספות של האינטגרל המסוים

בדוגמאות הבאות נראה את משמעות האינטגרל $\int_a^b f(x) dx$ כצבירת ערכי הפונקציה f

בקטע $[a, b]$, בהקשרים שונים:

א. ברז מים ממלא בריכה ריקה. ברגע ההתחלתו, קצב הזרימה הוא 10 ליטרים בדקה, אך קצב זה קטן עם הזמן: בזמן t (הנתון בדקות) קצב הזרימה הוא $10/(1+t)$ ליטרים בדקה. כמה מים יהיו בבריכה לאחר 4 דקות?
כדי לפתור את הבעיה, נתבונן בפונקציה $f(t) = 10/(1+t)$:



נתבונן בפרק זמן קצר, המתחיל בזמן t , ואורכו הוא Δt . כמות המים שתזרום בפרק זמן זה תהיה כ- $f(t)\Delta t$. אם נחלק את מקטע הזמן $[0, 4]$ ל- n חלקים $[t_i, t_{i+1}]$ שאורך כל אחד מהם $\Delta t = 4/n$, יהיה הסכום $\sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)\Delta t$ קירוב לכמות המים שזרמה לבריכה; וככל ש- n יגדל יתקרב מספר זה לכמות המים המדויקת. לכן כמות המים שזרמה לבריכה היא

$$\int_0^4 f(t) dt = \int_0^4 \frac{10}{1+t} dt$$

נחשב את האינטגרל הלא מסוים, בעזרת נוסחת ההצבה הלינארית:

$$\int \frac{10}{1+t} dt = 10 \int \frac{1}{1+t} dt = 10 \ln|1+t| + C$$

לכן כמות המים היא

$$\int_0^4 \frac{10}{1+t} dt = 10 \ln|1+t| \Big|_0^4 = 10 \ln 5 - 10 \ln 1 = 10 \ln 5 \approx 16.1$$

כלומר כ־16.1 ליטרים.

ב. מכונית מרוץ מאיצה מ־0 ל־100 קמ"ש בשלוש שניות. נניח כי בזמן ההאצה, המהירות גדלה באופן לינארי. מה המרחק שתעבור המכונית בזמן זה?

כדי לפתור את הבעיה, נתחיל מתרגום הנתונים ליחידות של מטרים בשנייה: 100 קמ"ש הם 100,000 מטרים ב־3600 שניות, וביחידות של מטרים בשנייה

$$\frac{100000}{3600} = \frac{1000}{36} \approx 27.78$$

נסמן מהירות זו ב־ v_3 . מהירותה של המכונית ברגע $0 \leq t \leq 3$ נתונה על ידי:

$$v(t) = v_3 \cdot \frac{t}{3}$$

פונקציה לינארית זו נבחרה כך שיתקיים: $v(0) = 0$, $v(3) = v_3$.

בפרק זמן קצר המתחיל בזמן t ואורכו Δt , המרחק שתעבור המכונית יהיה כ־ $v(t)\Delta t$ מטרים. כמקודם, צבירת ערכים אלה על פני הקטע $[0,3]$ תניב את המרחק הכולל שעברה המכונית:

$$\begin{aligned} \int_0^3 v(t) dt &= \int_0^3 \frac{v_3}{3} t dt = \frac{v_3}{3} \frac{t^2}{2} \Big|_0^3 = \frac{v_3}{3} \left(\frac{3^2}{2} - 0 \right) = \frac{3v_3}{2} \\ &= \frac{3}{2} \cdot \frac{1000}{36} = 41 \frac{2}{3} \approx 41.67 \end{aligned}$$

המכונית תעבור כ־41.67 מטרים.

נוכל לפתור בעיה זו בדרך נוספת:

נסמן ב- $f(t)$ את מיקומה של המכונית בזמן t , ונניח שמיקמנו את ציר המספרים כך שהמכונית נוסעת בכיוון החיובי. המרחק שתעבור המכונית ב-3 השניות הראשונות הוא: $f(3) - f(0)$.

כפי שלמדנו בשיעור הקודם, נגזרת הפונקציה $f(t)$ היא המהירות הרגעית:

$$f'(t) = v(t)$$

לכן f היא פונקציה קדומה של v . מהנוסחה היסודית נקבל:

$$f(3) - f(0) = \int_0^3 v(t) dt$$

וקיבלנו ביטוי עבור המרחק. כפי שחישבנו קודם, ביטוי זה שווה ל- $125/3 \approx 41.67$.

כללית, בהינתן גוף הנע על פני קו ישר, נסמן את מיקומו של הגוף בזמן t ב- $f(t)$, ואת מהירותו ב- $v(t)$. מתקיים הקשר $f'(t) = v(t)$. אם נתבונן על המיקום בשני זמנים שונים a ו- b (המקיימים $a < b$), נקבל מהנוסחה היסודית

$$f(b) - f(a) = \int_a^b v(t) dt$$

הגודל $f(b) - f(a)$ נקרא **העתק** הגוף בין הזמנים $t = a$ ו- $t = b$.

דוגמה זו היא ביטוי נוסף לקשר שבין האינטגרל לנגזרת: המהירות היא נגזרת פונקציית המיקום; ההעתק הוא האינטגרל של פונקציית המהירות.

שאלה 18

מאגר מים שנפחו 1000 ליטרים מתמלא על ידי מי גשמים. קצב מילוי המים מתחיל מ-0 ליטרים ליום, ומתגבר באופן ליניארי: בכל יום הוא עולה בשני ליטרים ליום. כעבור כמה זמן יתמלא המאגר?

התשובה בעמוד 245

שאלה 19

מכונית נוסעת במהירות 60 קמ"ש, ולפתע בולמת עד לעצירה מלאה. זמן הבלימה הוא 2 שניות, והמהירות פוחתת באופן ליניארי לאורכן. מהו המרחק שתעבור המכונית עד לעצירתה?

התשובה בעמוד 245

חישוב השטח בין שני גרפים

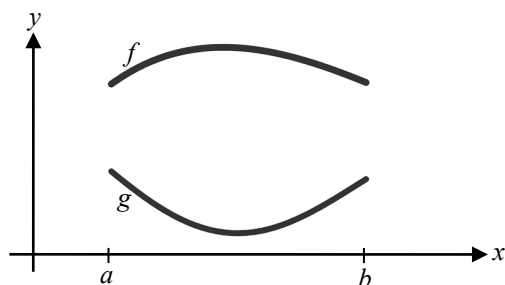
עד לשלב זה למדנו איך לחשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה בקטע נתון לבין ציר ה- x . בעוד שגרף הפונקציה יכול ללבוש צורות מגוונות בהתאם לבחירת הפונקציה, החלק התחתון של הצורה שאת שטחה חישבנו מוגבל מאוד: הוא קו ישר אופקי.

כדי להרחיב את יכולותינו, נתבונן במצב שבו נתונות שתי פונקציות רציפות, f ו- g , בקטע $[a, b]$ ואנו מעוניינים לחשב את השטח הכלוא בין הגרפים שלהן.

נניח תחילה שגרף הפונקציה f נמצא מעל גרף הפונקציה g .

משמעות הנחה זו היא שמתקיים התנאי הבא:

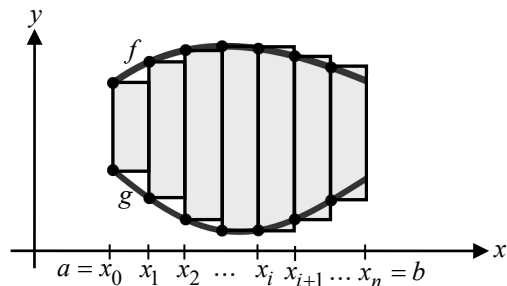
לכל $x \in [a, b]$ מתקיים $f(x) \geq g(x)$.



במצב זה, נוכל לנהוג בשיטה מוכרת: עבור מספר טבעי n , נחלק את הקטע $[a, b]$ ל- n חלקים שווים בגודלם. אורך כל חלק הוא $\Delta x = (b - a)/n$.

נקודות החלוקה הן: $x_i = a + i\Delta x$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$)

נקרב את הצורה שבין שני הגרפים על ידי המלבנים הבאים:



המלבן ה- i נמצא מעל הקטע $[x_i, x_{i+1}]$ ומוגדר על ידי התנאים:

$$x_i \leq x \leq x_{i+1}, \quad g(x_i) \leq y \leq f(x_i)$$

$$\Delta x (f(x_i) - g(x_i))$$

שטח המלבן ה- i הוא

סך שטחי המלבנים הוא:

$$\sum_{i=0}^{n-1} (f(x_i) - g(x_i)) \Delta x$$

גודל זה שווה בקירוב לשטח שבין שני הגרפים. ככל שנגדיל את n , יתקרב גודל זה לשטח

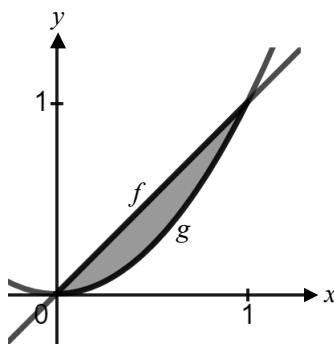
המבוקש. לכן השטח הוא

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} (f(x_i) - g(x_i)) \Delta x$$

ביטוי זה שווה במדויק לאינטגרל הבא:

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

חישבנו אפוא את השטח המבוקש.



לדוגמה, נתבונן בפונקציות הבאות בקטע $[0,1]$: $f(x) = x$, $g(x) = x^2$

לכל $0 \leq x \leq 1$ מתקיים $x^2 \leq x \cdot 1 = x$

לכן $f(x) \geq g(x)$ בקטע זה. השטח שבין שני הגרפים הוא

$$\begin{aligned} \int_0^1 (f(x) - g(x)) dx &= \int_0^1 (x - x^2) dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 \\ &= \left(\frac{1^2}{2} - \frac{1^3}{3} \right) - \left(\frac{0^2}{2} - \frac{0^3}{3} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

עתה נתבונן במצב שבו מתקיים $f(x) \leq g(x)$ בקטע $[a,b]$.

במצב כזה, נקבל מיידית מהנוסחה שפיתחנו, שהשטח הכלוא בין שני הגרפים הוא

$$S = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx$$

נשים לב שאם $f(x) \geq g(x)$ אז $f(x) - g(x) \geq 0$, ולכן:

$$f(x) - g(x) = |f(x) - g(x)|$$

ואם $f(x) \leq g(x)$ אז $f(x) - g(x) \leq 0$, ולכן:

$$g(x) - f(x) = -(f(x) - g(x)) = |f(x) - g(x)|$$

נוכל, אם כך, לכתוב נוסחה אחת התקפה לשני המקרים:

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

נוסחה זו תקפה גם במצב שבו אין פונקציה אחת הגדולה מרעותה, אלא הן מתחלפות ביניהן בהובלה.

$$f(x) = x, g(x) = x^2$$

נתבונן, לדוגמה, בפונקציות המוכרות

הפעם, בקטע $[0, 2]$.

$$x \geq x^2$$

לכל $0 \leq x \leq 1$, כפי שראינו קודם, מתקיים:

$$x^2 \geq x \cdot 1 = x$$

לכל $1 \leq x \leq 2$ מתקיים:

לכן השטח המוגבל בין שני הגרפים הוא

$$S = \int_0^2 |f(x) - g(x)| dx = \int_0^2 |x - x^2| dx = \int_0^1 |x - x^2| dx + \int_1^2 |x - x^2| dx$$

נחשב בנפרד:

לכל $0 \leq x \leq 1$ מתקיים $|x - x^2| = x - x^2$, ולכן

$$\int_0^1 |x - x^2| dx = \int_0^1 (x - x^2) dx = \frac{1}{6}$$

בחישוב זה הסתמכנו על החישוב מהדוגמה הקודמת.

לכל $1 \leq x \leq 2$ מתקיים $|x - x^2| = -(x - x^2) = x^2 - x$, ולכן

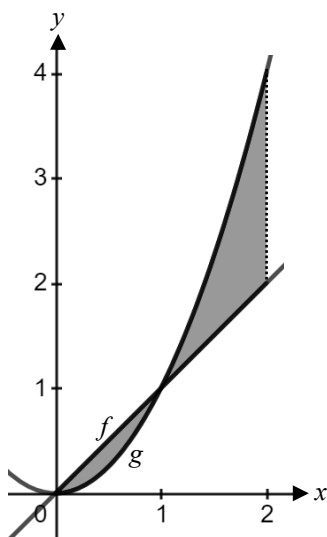
$$\begin{aligned} \int_1^2 |x - x^2| dx &= \int_1^2 (x^2 - x) dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^2 \\ &= \left(\frac{2^3}{3} - \frac{2^2}{2} \right) - \left(\frac{1^3}{3} - \frac{1^2}{2} \right) = \left(\frac{8}{3} - \frac{4}{2} \right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

$$S = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} = 1$$

בסך הכול נקבל:

שאלה 20

- חשבו את השטח בין הגרפים $y = x^2$ ו- $y = x^3$ בקטע $[0, 1]$.
- חשבו את השטח בין הגרפים $y = 2^x$ ו- $y = 3^x$ בקטע $[-1, 1]$.
- חשבו את השטח בין הגרפים $y = \sin x$ ו- $y = -\sin x$ בקטע $[0, 2\pi]$.
- חשבו את השטח התחום בין הגרף $y = x^2$ והישר $y = 4$.



התשובה בעמוד 246

סיכום שיעור 12

בשיעור זה פיתחנו את מושג האינטגרל ועמדנו על הקשר בינו לבין מושג הנגזרת. בכך השלמנו את תיאור המהפכה המתמטית שהובילו ניוטון ולייבניץ, והבנו את קשרי הגומלין שבין בעיית המשיק לבין בעיית השטח.

רכשנו טכניקות רבות לחישוב האינטגרל הלא מסוים, ויישמנו אותן בחישובי אינטגרלים מסוימים המתקבלים מבעיות גיאומטריות ופיזיקליות.

כדי לוודא שהרעיונות המרכזיים של החשבון האינטגרלי נהירים לכם, ענו על השאלה הבאה:

שאלה 21

- א. מהו הקשר בין מושג האינטגרל למושג הנגזרת?
- ב. כיצד נחשב שטח הכלוא מתחת לגרף של פונקציה?
- ג. האם יש רק פונקציה קדומה אחת לפונקציה נתונה?
- ד. מהו ההבדל בין אינטגרל מסוים לאינטגרל לא מסוים? מהו הקשר בין שני המושגים?

התשובה בעמוד 247

שאלות להערכה עצמית

שאלה 22

חשבו את האינטגרלים הבאים:

- א. $\int (2x + 8) dx$
 ג. $\int \frac{x^3 + x + 3}{x^2} dx$
 ה. $\int x e^{x^2} dx$
 ז. $\int \frac{7^x}{8^x} dx$
 ט. $\int \ln \sqrt{x} dx$
 יא. $\int \sin 2x \sin 3x dx$
- ב. $\int (5x^7 - x^2 - 2) dx$
 ד. $\int (8x + 1)^7 dx$
 ו. $\int x^2 e^x dx$
 ח. $\int \frac{1}{x \ln^2 x} dx$
 י. $\int \sin(2x + 1) dx$
 יב. $\int \tan^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx$

התשובה בעמוד 248

שאלה 23

חשבו את האינטגרלים המסוימים הבאים:

- א. $\int_1^2 (x^2 + 5x - 7) dx$
 ג. $\int_1^3 |x^2 - 5| dx$
- ב. $\int_1^{10} \frac{1}{8x - 1} dx$
 ד. $\int_0^5 |\sin x| dx$

התשובה בעמוד 249

שאלה 24

- א. העריכו את האינטגרל $\int_1^2 x^{-2} dx$ על ידי חלוקת הקטע $[1, 2]$ לארבעה חלקים.
 ב. חשבו, לשם השוואה, את הערך המדויק של האינטגרל.

התשובה בעמוד 250

שאלה 25

- א. חשבו את השטח שבין הגרפים של הפונקציות $f(x) = x$, $g(x) = x^3$ בקטע $[-1, 1]$.
 ב. חשבו את השטח התחום בין הפרבולות $y = x^2 - x - 1$ ו- $y = 5 - x^2$.

התשובה בעמוד 251

סוף דבר

הגעתם לסיומו של הקורס 'מתמטיקה קדם אקדמית'.

עברנו יחד כברת דרך ארוכה. התחלנו בלימוד החוקים הבסיסיים ביותר של פעולות החשבון; עברנו לזהויות, משוואות ואי־שוויונות. המשכנו בסדרות ואינדוקציה, פונקציות, חזקות ולוגריתמים. לאחר מכן התמקדנו בנושאים גיאומטריים כשלמדנו מושגים בגיאומטריה, טריגונומטריה וגיאומטריה אנליטית. לבסוף, למדנו את יסודות החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי.

חלקו החשוב ביותר של הקורס הינו החלק הראשון, ובו רכשתם את הבסיס של החשיבה המתמטית והטכניקה האלגברית. נושאים אלה שזורים לכל אורך המשך הקורס.

יחסי גומלין עשירים מתקיימים גם בין חלקיו המתקדמים יותר של הקורס: הפונקציות ממלאות תפקיד חשוב בטריגונומטריה ובחשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי; הטריגונומטריה מיושמת בגיאומטריה האנליטית; הפונקציות הטריגונומטריות והמעריכיות מנותחות במסגרת החשבון הדיפרנציאלי; ואלה הן רק דוגמאות אחדות.

שביליה של המתמטיקה רחבים וברורים, ומחבר הקורס מאחל לכם שתצעדו בהם ללא חשש, ותמשיכו לגלות את העושר, היופי והעניין הטמונים בהם.

פתרונות לשאלות בשיעור 9

השאלה בעמוד 9

תשובה 1

א. נתון ש- $c = 100$, וחישבנו ש- $a = 100 \sin 40^\circ \approx 64.27$. כדי למצוא את אורך הצלע

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad b, \text{ ניעזר במשפט פיתגורס:}$$

$$b^2 = c^2 - a^2$$

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{100^2 - (100 \cdot \sin 40^\circ)^2} \approx 76.6$$

ב. נתון: $c = 7$, $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 20^\circ$. לפיכך:

$$\sin 20^\circ = \frac{a}{c} \Rightarrow a = c \sin 20^\circ = 7 \cdot \sin 20^\circ \approx 2.39$$

ג. נתון: $a = 5$, $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$. לפיכך:

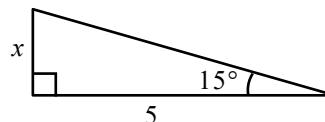
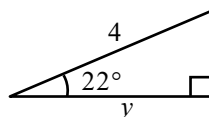
$$\sin 30^\circ = \frac{a}{c} \Rightarrow c = \frac{a}{\sin 30^\circ}$$

$$c = \frac{a}{1/2} = 2a = 10 \quad \text{ראינו ש-} \sin 30^\circ = 1/2 \text{ לכן}$$

השאלה בעמוד 9

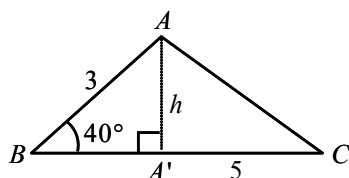
תשובה 2

א.



$$\tan 15^\circ = \frac{x}{5} \Rightarrow x = 5 \tan 15^\circ \approx 1.34$$

$$\cos 22^\circ = \frac{y}{4} \Rightarrow y = 4 \cos 22^\circ \approx 3.71$$



ב. נתון: $\overline{AB} = 3$, $\overline{BC} = 5$, $\angle ABC = 40^\circ$.

נעביר את הגובה AA' . מהמשולש ישר הזווית $\triangle AA'B$ נקבל

$$\sin 40^\circ = \frac{\overline{AA'}}{3} \Rightarrow h = \overline{AA'} = 3 \sin 40^\circ \approx 1.93$$

$$\frac{\overline{BC} \cdot h}{2} = \frac{5 \cdot 3 \cdot \sin 40^\circ}{2} \approx 4.82$$

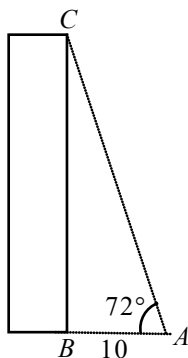
שטח המשולש הוא

ג. נסמן את הנקודות A, B, C שבאיור.

הבניין ניצב לקרקע, לכן $\angle ABC = 90^\circ$. מכאן:

$$\tan 72^\circ = \frac{\overline{BC}}{10} \Rightarrow \overline{BC} = 10 \tan 72^\circ \approx 30.78$$

גובה הבניין הוא 30 מטרים ו-78 ס"מ.



השאלה בעמוד 11

תשובה 3

א. נתון ש- $\sin \alpha = 0.8$. לפי הזהות $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$:

$$0.8^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - 0.64 = 0.36$$

$$\cos \alpha = \sqrt{0.36} = 0.6 \quad \cos \alpha > 0 \text{ ולכן:}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{0.8}{0.6} = \frac{4}{3}; \quad \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{3}{4} \quad \text{מכאן}$$

ב. לפי הזהויות היסודיות,

$$1 + \tan^2 \alpha = 1 + \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right)^2 = 1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$1 + \cot^2 \alpha = 1 + \left(\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right)^2 = 1 + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$\tan \alpha = \frac{5}{12} \quad \text{ג. נתון:}$$

לפי הזהות שהוכחנו בסעיף הקודם,

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha = 1 + \left(\frac{5}{12} \right)^2 = 1 + \frac{25}{144} = \frac{169}{144}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{144}{169} = \left(\frac{12}{13} \right)^2 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{12}{13} \quad \text{לכן}$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = \frac{25}{169} = \left(\frac{5}{13} \right)^2 \Rightarrow \sin \alpha = \frac{5}{13} \quad \text{כמו כן,}$$

השאלה בעמוד 14

תשובה 4

$$10^\circ = \frac{180^\circ}{18} = \frac{\pi}{18} \quad \text{א. לפי הקשר } \pi = 180^\circ$$

$$135^\circ = \frac{180^\circ}{4} \cdot 3 = \frac{3\pi}{4}$$

$$100^\circ = \frac{180^\circ}{18} \cdot 10 = \frac{\pi \cdot 10}{18} = \frac{5\pi}{9}$$

$$\frac{\pi}{5} = \frac{180^\circ}{5} = 36^\circ \quad \text{ב. לפי הקשר } \pi = 180^\circ$$

$$\frac{2\pi}{3} = \frac{2}{3} \cdot 180^\circ = 120^\circ$$

$$3 = 3 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \approx 171.89^\circ \quad \text{לפי הקשר } 1 = 180^\circ / \pi$$

$$\sin \frac{\pi}{6} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \quad \text{ג.}$$

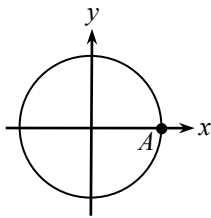
$$\cos \frac{\pi}{4} = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 1 \approx 1.557$$

בעזרת מחשבון נקבל

◁ במחשבון ניתן להזין זוויות ברדיאנים. יש להקפיד ולוודא שהמחשבון נמצא במצב הנכון (מעלות / רדיאנים) לצורך כל חישוב.

השאלה בעמוד 15



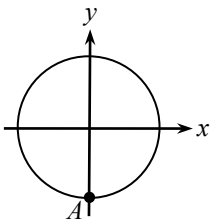
א. עבור הזווית $\alpha = 0^\circ$, הנקודה המתאימה על מעגל היחידה נמצאת על הכיוון החיובי של ציר ה- x , וזו הנקודה $A = (1, 0)$. לכן,

$$\sin 0^\circ = 0, \cos 0^\circ = 1$$

$$\tan 0^\circ = \frac{0}{1} = 0$$

מכאן נקבל

הערך $\cot 0^\circ$ אינו מוגדר כי $\sin 0^\circ = 0$.



ב. עבור הזווית $\alpha = 3\pi/2 = 270^\circ$, הנקודה המתאימה על מעגל היחידה נמצאת על הכיוון השלילי של ציר ה- y , וזו הנקודה $A = (0, -1)$. לכן,

$$\sin 270^\circ = -1, \cos 270^\circ = 0$$

$$\cot 270^\circ = \frac{0}{-1} = 0$$

מכאן נקבל

הערך $\tan 270^\circ$ אינו מוגדר כי $\cos 270^\circ = 0$.

ג. לפי הזהויות שפותחו,

$$\sin 120^\circ = \sin(90^\circ + 30^\circ) = \sin(90^\circ - 30^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120^\circ = \cos(90^\circ + 30^\circ) = -\cos(90^\circ - 30^\circ) = \cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\tan 120^\circ = \frac{\sin 120^\circ}{\cos 120^\circ} = -\sqrt{3}$$

השאלה בעמוד 16

תשובה 6

א. הזווית $\alpha = 200^\circ$ מקיימת $180^\circ < \alpha < 270^\circ$, כלומר $\pi < \alpha < 3\pi/2$. הנקודה על מעגל היחידה המתאימה לזווית זו נמצאת ברביע השלישי.

ב. הזווית $\alpha = 300^\circ$ מקיימת $270^\circ < \alpha < 360^\circ$, כלומר $3\pi/2 < \alpha < 2\pi$. הנקודה המתאימה לזווית זו נמצאת ברביע הרביעי.

ג. הנקודה המתאימה לזווית $\alpha = \pi = 180^\circ$ נמצאת במפגש הרביעים השני והשלישי.

ד. הנקודה המתאימה לזווית $\alpha = \pi/2 = 90^\circ$ נמצאת במפגש הרביעים הראשון והשני.

ה. הזווית $\alpha = 8\pi/5 = 8 \cdot 180^\circ/5 = 288^\circ$ מקיימת $270^\circ < \alpha < 360^\circ$, כלומר $3\pi/2 < \alpha < 2\pi$. הנקודה המתאימה לזווית זו נמצאת ברביע הרביעי.

השאלה בעמוד 19

תשובה 7

בכל אחד מהסעיפים, נוסיף לזווית כפולה מתאימה של 2π (או 360°) על מנת לקבל זווית בתחום $[0, 2\pi)$ המתאימה לאותה נקודה על מעגל היחידה.

א. $\frac{5}{4}\pi - 8\pi = \frac{5}{4}\pi - 9\frac{1}{4}\pi$, ו- $\frac{3\pi}{2} < \frac{5}{4}\pi < \pi$. הנקודה ברביע השלישי.

ב. $-\frac{3}{4}\pi + 2\pi = \frac{5}{4}\pi$. הנקודה זהה לנקודה בסעיף א ונמצאת ברביע השלישי.

ג. $900^\circ - 720^\circ = 180^\circ$. הנקודה במפגש הרביעים השני והשלישי.

ד. $412^\circ - 360^\circ = 52^\circ$. הנקודה ברביע הראשון.

ה. $-800^\circ + 1080^\circ = 280^\circ$ ו- $270^\circ < 280^\circ < 360^\circ$. הנקודה נמצאת ברביע הרביעי.

השאלה בעמוד 21

תשובה 8

ניעזר במחזוריות הפונקציות, שעל פיה, הוספת כפולה של $2\pi = 360^\circ$ לזווית לא משנה את ערכי הפונקציות הטריגונומטריות הבסיסיות בה.

א. $\sin 390^\circ = \sin(390^\circ - 360^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

ב. $\tan \frac{9\pi}{4} = \tan\left(\frac{9\pi}{4} - 2\pi\right) = \tan\left(\pi\left(\frac{9}{4} - 2\right)\right) = \tan \frac{\pi}{4} = 1$

ג. $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{-\pi}{2} + 2\pi\right) = \cos \frac{3\pi}{2} = 0$

ד. $\cos 12\pi = \cos(12\pi - 6 \cdot 2\pi) = \cos 0 = 1$

ה. לפי הערכים שחושבו בתשובה 5ג,

$$\begin{aligned}\cot 480^\circ &= \cot(480^\circ - 360^\circ) = \cot 120^\circ = \frac{\cos 120^\circ}{\sin 120^\circ} \\ &= \frac{-1/2}{\sqrt{3}/2} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

השאלה בעמוד 22

תשובה 9

א. $\begin{aligned}\sin 210^\circ &= \sin(180^\circ + 30^\circ) = \sin 180^\circ \cos 30^\circ + \cos 180^\circ \sin 30^\circ \\ &= 0 \cdot \cos 30^\circ + (-1) \cdot \sin 30^\circ = -\frac{1}{2}\end{aligned}$

ב. $\begin{aligned}\cos 210^\circ &= \cos(180^\circ + 30^\circ) = \cos 180^\circ \cos 30^\circ - \sin 180^\circ \sin 30^\circ \\ &= (-1) \cdot \cos 30^\circ + 0 \cdot \sin 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$

ג. $\sin 330^\circ = \sin(330^\circ - 360^\circ) = \sin(-30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$

ד. $\cos 330^\circ = \cos(330^\circ - 360^\circ) = \cos(-30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

השאלה בעמוד 22

תשובה 10

נתון ש- $\pi < \alpha < 3\pi/2$. לכן, הנקודה המתאימה לזווית α נופלת ברביע השלישי. מכאן, $\cos \alpha < 0$. מהזהות $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ומהנתון $\sin \alpha = -0.6$ נקבל $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - (-0.6)^2 = 0.64 = 0.8^2$ לפיכך, $\cos \alpha = -0.8$ ולכן $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-0.6}{-0.8} = \frac{3}{4}$

השאלה בעמוד 23

תשובה 11

נוכיח את הזהויות על פי סדר הסעיפים:

ב. $\sin(\pi + \alpha) = \sin \pi \cos \alpha + \cos \pi \sin \alpha = 0 \cdot \cos \alpha + (-1) \cdot \sin \alpha = -\sin \alpha$
 $\cos(\pi + \alpha) = \cos \pi \cos \alpha - \sin \pi \sin \alpha = (-1) \cdot \cos \alpha - 0 \cdot \sin \alpha = -\cos \alpha$
 מהזהויות אלה נקבל:

$$\tan(\pi + \alpha) = \frac{\sin(\pi + \alpha)}{\cos(\pi + \alpha)} = \frac{-\sin \alpha}{-\cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$$

$$\cot(\pi + \alpha) = \frac{\cos(\pi + \alpha)}{\sin(\pi + \alpha)} = \frac{-\cos \alpha}{-\sin \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \cot \alpha$$

ג. לפי נוסחת סינוס ההפרש:

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \pi \cos \alpha - \cos \pi \sin \alpha = 0 \cdot \cos \alpha - (-1) \cdot \sin \alpha = \sin \alpha$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} \quad \text{ד.}$$

נחלק את המונה והמכנה ב- $\cos \alpha \cos \beta$ (ביטוי זה שונה מאפס כי $\tan \alpha, \tan \beta$ מוגדרים):

$$= \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta}}{1 - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\cot(\alpha + \beta) = \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta} \quad \text{ה.}$$

נחלק את המונה והמכנה ב- $\sin \alpha \sin \beta$ (ביטוי זה שונה מאפס כי $\cot \alpha, \cot \beta$ מוגדרים):

$$= \frac{\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \cdot \frac{\cos \beta}{\sin \beta} - 1}{\frac{\cos \beta}{\sin \beta} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}} = \frac{\cot \alpha \cot \beta - 1}{\cot \alpha + \cot \beta}$$

$$\tan(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\tan \alpha \quad \text{ו.}$$

$$\cot(-\alpha) = \frac{\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)} = \frac{\cos \alpha}{-\sin \alpha} = -\cot \alpha$$

השאלה בעמוד 23

תשובה 12

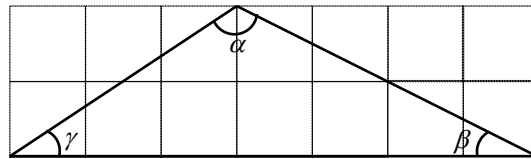
$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\alpha \cos\frac{\pi}{2} + \cos\alpha \sin\frac{\pi}{2} = \sin\alpha \cdot 0 + \cos\alpha \cdot 1 = \cos\alpha \quad \text{א.}$$

$$\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\alpha \cos\frac{\pi}{2} - \sin\alpha \sin\frac{\pi}{2} = \cos\alpha \cdot 0 - \sin\alpha \cdot 1 = -\sin\alpha \quad \text{ב.}$$

$$\begin{aligned} \tan(\alpha - \beta) &= \tan(\alpha + (-\beta)) = \frac{\tan\alpha + \tan(-\beta)}{1 - \tan\alpha \tan(-\beta)} \\ &= \frac{\tan\alpha + (-\tan\beta)}{1 - \tan\alpha(-\tan\beta)} = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \tan\beta} \quad \text{ג.} \end{aligned}$$

השאלה בעמוד 23

תשובה 13



נסמן ב- a את אורך הצלע של כל משבצת באיור (שצורתה ריבוע).

$$\tan\beta = \frac{2a}{4a} = \frac{1}{2}, \quad \tan\gamma = \frac{2a}{3a} = \frac{2}{3} \quad \text{מהאיור ניתן לראות כי:}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi \quad \text{סכום הזוויות במשולש הוא } \pi = 180^\circ, \text{ כלומר}$$

$$\tan\alpha = \tan(\pi - (\beta + \gamma)) = \tan(\pi + (-(\beta + \gamma))) \quad \text{לכן:}$$

$$\begin{aligned} &= \tan(-(\beta + \gamma)) = -\tan(\beta + \gamma) \\ &= -\frac{\tan\beta + \tan\gamma}{1 - \tan\beta \tan\gamma} = -\frac{\frac{1}{2} + \frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}} = -\frac{\frac{7}{6}}{\frac{1}{6}} = -\frac{7}{6} \cdot \frac{6}{1} = -7 \end{aligned}$$

השאלה בעמוד 25

תשובה 14

$$\text{א. (i) ידוע, כי: } \sin 45^\circ = \sqrt{2}/2. \text{ הזווית } 45^\circ = \pi/4 \text{ שייכת לתחום } [-\pi/2, \pi/2]. \text{ לכן}$$

$$\arcsin \sqrt{2}/2 = 45^\circ = \pi/4$$

$$\text{(ii) ידוע, כי: } \sin 60^\circ = \sqrt{3}/2. \text{ הזווית } 60^\circ = \pi/3 \text{ שייכת לתחום } [-\pi/2, \pi/2]. \text{ לכן}$$

$$\arcsin \sqrt{3}/2 = 60^\circ = \pi/3$$

$$\text{(iii) מאיזוגיות פונקציית הסינוס נקבל: } \sin(-30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\text{הזווית } -30^\circ = -\pi/6 \text{ שייכת לתחום } [-\pi/2, \pi/2]. \text{ לכן}$$

$$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -30^\circ = -\frac{\pi}{6}$$

ב. נסמן את אורכי הניצבים ב- $a = 3$, $b = 5$, ואת אורך היתר ב- c . לפי משפט פיתגורס,

$$c^2 = a^2 + b^2 = 9 + 25 = 34 \Rightarrow c = \sqrt{34}$$

הזווית α שמול הניצב a היא זווית חדה המקיימת

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{3}{\sqrt{34}} \Rightarrow \alpha = \arcsin \frac{3}{\sqrt{34}} \approx 0.54 \approx 30.96^\circ$$

סכום הזוויות במשולש הוא 180° , לכן הזווית β שמול הניצב b מקיימת

$$\alpha + \beta + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow \beta = 90^\circ - \alpha \approx 59.04^\circ \approx 1.03$$

ג. הגדרנו: $y = \sin 100^\circ$. לפי הזהות $\sin(90^\circ + \alpha) = \sin(90^\circ - \alpha)$,

$$y = \sin(90^\circ + 10^\circ) = \sin(90^\circ - 10^\circ) = \sin 80^\circ$$

הזווית 80° היא חדה, ולכן שייכת לקטע $[-\pi/2, \pi/2]$. לכן

$$\arcsin y = 80^\circ$$

השאלה בעמוד 28

תשובה 15

א. נתון ש- $0 < \alpha < \pi/2$ ו- $\tan \alpha = 3$. לפי הגדרת הפונקציה ההפוכה:

$$\alpha = \tan^{-1} 3 \approx 1.25 \approx 71.57^\circ$$

ב. נזכור ש- $\cot 30^\circ = \sqrt{3}$.

הזווית 30° חדה, ובפרט, שייכת לקטע $(0, \pi)$. לכן $\operatorname{arccot} \sqrt{3} = 30^\circ = \pi/6$.

ג. נתון משולש $\triangle ABC$ שבו $\angle C = 90^\circ$, $\overline{AB} = 7$, $\overline{AC} = 5$, $b = \overline{AC} = 5$, $c = \overline{AB} = 7$. המשולש

$$\cos \angle A = \frac{b}{c} = \frac{5}{7}$$

ישר-זווית, ולפי הגדרת הקוסינוס,

הזווית $\angle A$ חדה, ובפרט, שייכת לקטע $[0, \pi]$. לכן

$$\angle A = \arccos \frac{5}{7} \approx 0.78 \approx 44.41^\circ$$

ד. נתון משולש $\triangle ABC$ שבו $\angle C = 90^\circ$, $\overline{AC} = 7$, $\overline{BC} = 3$, $a = \overline{BC} = 3$, $b = \overline{AC} = 7$.

$$\tan \angle A = \frac{a}{b} = \frac{3}{7}$$

המשולש ישר-זווית, ולפי הגדרת הטנגנס,

הזווית $\angle A$ חדה, ובפרט, שייכת לקטע $(-\pi/2, \pi/2)$. לכן

$$\angle A = \arctan \frac{3}{7} \approx 0.40 \approx 23.20^\circ$$

השאלה בעמוד 28

תשובה 16

א. הזהויות בסעיף זה: $\sin(\arcsin y) = y$, $\cos(\arccos y) = y$ (עבור $-1 \leq y \leq 1$)

נובעות מהגדרת הפונקציה ההפוכה (ראו בשיעור 6):

בהינתן פונקציה חח"ע $f: A \rightarrow B$, לכל $b \in \operatorname{Im} f$ מתקיים $f(f^{-1}(b)) = b$.

עבור הפונקציות $f(x) = \sin x$ ו- $f(x) = \cos x$ מתקבלות הזהויות המבוקשות.

ב. גם הזהויות בסעיף זה: $\arcsin(\sin \alpha) = \alpha$ (עבור $-\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2$),

$\arccos(\cos \alpha) = \alpha$ (עבור $0 \leq \alpha \leq \pi$) נובעות מהגדרת הפונקציה ההפוכה:

בהינתן פונקציה חח"ע $f: A \rightarrow B$, לכל $a \in A$ מתקיים $f^{-1}(f(a)) = a$.

עבור הפונקציות $f(x) = \sin x$ ו- $f(x) = \cos x$ מתקבלות הזהויות המבוקשות.

ג. יהי $0 < y < 1$ ונסמן $\alpha = \arcsin y$. α היא זווית חדה, וכפי שהוכחנו בעזרת משולש

$$\sin \alpha = \cos(\pi/2 - \alpha), \quad \text{ישר-זווית,}$$

$$\cos(\pi/2 - \alpha) = y \quad \text{מכאן}$$

$$\arccos y = \pi/2 - \alpha \quad \text{גם } \pi/2 - \alpha \text{ היא זווית חדה. לכן:}$$

$$\arcsin y + \arccos y = \alpha + (\pi/2 - \alpha) = \pi/2 \quad \text{לפיכך:}$$

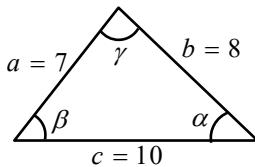
נוודא שזהות זו מתקיימת גם עבור הערכים $y = 0, 1$:

$$\arcsin 0 + \arccos 0 = 0 + \pi/2 = \pi/2$$

$$\arcsin 1 + \arccos 1 = \pi/2 + 0 = \pi/2$$

הוכחנו, אפוא, שלכל $0 \leq y \leq 1$ מתקיים $\arcsin y + \arccos y = \pi/2$. $\square$

השאלה בעמוד 29



תשובה 17

א. נתון: $a = 7, b = 8, c = 10$; הזווית γ חושבה בדוגמה שבשיעור.

נחשב את הזוויות α, β :

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta, \quad \text{לפי משפט הקוסינוסים,}$$

$$\Rightarrow 64 = 49 + 100 - 140 \cos \beta \Rightarrow 140 \cos \beta = 85 \Rightarrow \cos \beta = \frac{85}{140} = \frac{17}{28}$$

$$\beta = \arccos \frac{17}{28} \approx 52.62^\circ, \quad \text{מכאן,}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha \quad \text{באופן דומה:}$$

$$\Rightarrow 49 = 64 + 100 - 160 \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{115}{160} = \frac{23}{32}$$

$$\Rightarrow \alpha = \arccos \frac{23}{32} \approx 44.05^\circ$$

ב. נסמן: $a = 3, b = 4, c = 6$. ממשפט הקוסינוסים נקבל:

$$3^2 = 4^2 + 6^2 - 48 \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{16 + 36 - 9}{48} = \frac{43}{48}$$

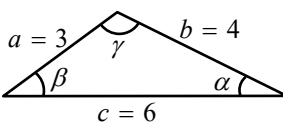
$$\Rightarrow \alpha = \arccos \frac{43}{48} \approx 26.38^\circ$$

$$4^2 = 3^2 + 6^2 - 36 \cos \beta \Rightarrow \cos \beta = \frac{9 + 36 - 16}{36} = \frac{29}{36}$$

$$\Rightarrow \beta = \arccos \frac{29}{36} \approx 36.33^\circ$$

$$6^2 = 3^2 + 4^2 - 24 \cos \gamma \Rightarrow \cos \gamma = \frac{36 - 9 - 16}{-24} = -\frac{11}{24}$$

$$\Rightarrow \gamma = \arccos \frac{-11}{24} \approx 117.28^\circ$$

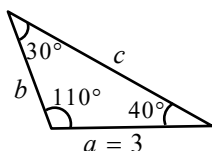


ג. נתונים אורכי שתי צלעות: $a = 4, b = 5$, והזווית שביניהן $\gamma = 40^\circ$. לפי משפט הקוסינוסים, אורך הצלע השלישית, c , מקיים:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma = 4^2 + 5^2 - 40 \cos 40^\circ$$

$$\Rightarrow c = \sqrt{41 - 40 \cos 40^\circ} \approx 3.22$$

השאלה בעמוד 31



תשובה 18

סכום הזוויות במשולש הוא 180° , לכן הזווית שמול הצלע c היא

$$180^\circ - 30^\circ - 40^\circ = 110^\circ$$

$$\frac{c}{\sin 110^\circ} = \frac{a}{\sin 30^\circ}$$

לפי משפט הסינוסים,

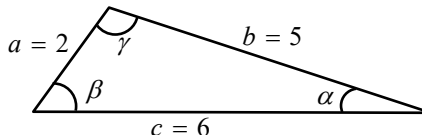
$$c = a \frac{\sin 110^\circ}{\sin 30^\circ} = 3 \cdot \frac{\sin 110^\circ}{0.5} \approx 5.64$$

ולכן

השאלה בעמוד 31

תשובה 19

נסמן את צלעות הזווית המשולש:



נתחיל בחישוב הזווית γ . לפי משפט הקוסינוסים,

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

$$\Rightarrow \cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{4 + 25 - 36}{20} = \frac{-7}{20}$$

$$\Rightarrow \gamma = \arccos \frac{-7}{20} \approx 110.49$$

$$2R = \frac{c}{\sin \gamma} = \frac{6}{\sin \gamma} \Rightarrow R = \frac{3}{\sin \gamma} \approx 3.20$$

לפי משפט הסינוסים,

הערה: ניתן לסיים את החישוב ללא שימוש בפונקציות טריגונומטריות הפוכות:

$$0 < \gamma < 180^\circ, \text{ לכן } \sin \gamma > 0.$$

$$\sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma = 1 \Rightarrow \sin^2 \gamma = 1 - \cos^2 \gamma = 1 - \frac{49}{400} = \frac{351}{400}$$

$$\Rightarrow \sin \gamma = \sqrt{\frac{351}{400}} = \frac{\sqrt{351}}{20} \Rightarrow R = \frac{3}{\sin \gamma} = \frac{60}{\sqrt{351}} \approx 3.20$$

השאלה בעמוד 32

תשובה 20

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \quad \text{לפי הזהות}$$

$$\tan 2\alpha = \tan(\alpha + \alpha) = \frac{\tan \alpha + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha \tan \alpha} = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \quad \text{נקבל:}$$

$$\cot(\alpha + \beta) = \frac{\cot \alpha \cot \beta - 1}{\cot \alpha + \cot \beta} \quad \text{לפי הזהות}$$

$$\cot 2\alpha = \cot(\alpha + \alpha) = \frac{\cot \alpha \cot \alpha - 1}{\cot \alpha + \cot \alpha} = \frac{\cot^2 \alpha - 1}{2 \cot \alpha} \quad \text{נקבל:}$$

השאלה בעמוד 32

תשובה 21

לכל α שעבורו $\tan \alpha$ מוגדר, מתקיים:

$$1 + \tan^2 \alpha = 1 + \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right)^2 = 1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} \quad \text{לכן}$$

לפי זהויות הזווית הכפולה:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cos^2 \alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = \frac{2}{1 + \tan^2 \alpha} - 1 = \frac{2 - (1 + \tan^2 \alpha)}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$$

השאלה בעמוד 32

תשובה 22

לפי הנוסחאות עבור סכום זוויות, ונוסחאות הזווית הכפולה:

$$\begin{aligned} \sin 3\alpha &= \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha \sin \alpha \\ &= 2 \sin \alpha \cos \alpha \cos \alpha + (1 - 2 \sin^2 \alpha) \sin \alpha \\ &= 2 \sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha) + \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha \\ &= 2 \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha + \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha \\ &= 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha \end{aligned} \quad \text{א.}$$

$$\begin{aligned} \cos 3\alpha &= \cos(2\alpha + \alpha) = \cos 2\alpha \cos \alpha - \sin 2\alpha \sin \alpha \\ &= (2 \cos^2 \alpha - 1) \cos \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha \sin \alpha \\ &= 2 \cos^3 \alpha - \cos \alpha - 2 \cos \alpha (1 - \cos^2 \alpha) \\ &= 2 \cos^3 \alpha - \cos \alpha - 2 \cos \alpha + 2 \cos^3 \alpha \\ &= 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \end{aligned} \quad \text{ב.}$$

השאלה בעמוד 33

תשובה 23

א. לפי נוסחת סכום הקוסינוסים,

$$\begin{aligned}\cos x + \cos 3x &= \cos 3x + \cos x = 2 \cos \frac{3x+x}{2} \cos \frac{3x-x}{2} \\ &= 2 \cos 2x \cos x\end{aligned}$$

ב. לפי נוסחת סכום הסינוסים,

$$\begin{aligned}2 \sin x + \sqrt{2} &= 2 \left(\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2(\sin x + \sin 45^\circ) \\ &= 4 \sin \frac{x+45^\circ}{2} \cos \frac{x-45^\circ}{2}\end{aligned}$$

ג. כפי שראינו בשאלה 12,

$$\cos x = \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right)$$

לפי נוסחת הפרש הסינוסים,

$$\begin{aligned}\sin x - \cos x &= \sin x - \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right) \\ &= 2 \sin \left(\frac{x - (x + \pi/2)}{2} \right) \cos \left(\frac{x + (x + \pi/2)}{2} \right) \\ &= 2 \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \cos \left(\frac{2x + \pi/2}{2} \right) \\ &= -2 \sin \left(\frac{\pi}{4} \right) \cos \left(x + \pi/4 \right) = -\sqrt{2} \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right)\end{aligned}$$

השאלה בעמוד 33

תשובה 24

ניעזר בנוסחאות עבור קוסינוס סכום והפרש זוויות:

$$(1) \quad \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$(2) \quad \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = 2 \sin \alpha \sin \beta \quad \text{נחסר את (1) מ-(2):}$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2} \quad \text{נחלק ב-2:}$$

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta \quad \text{מחיבור (1) ו-(2) נקבל:}$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{2} \quad \text{נחלק ב-2:}$$

לבסוף, ניעזר בזהויות הסינוס של סכום והפרש זוויות:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta \quad \text{מחיבור הזהויות נקבל:}$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2} \quad \text{מכאן} \quad \square$$

השאלה בעמוד 35

תשובה 25

א. נסתמך על נוסחאות הכפל המקוצר, הזהות $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, וזהויות הזווית

$$(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha \quad \text{הכפולה:}$$

$$= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + 2 \sin \alpha \cos \alpha = 1 + \sin 2\alpha$$

ב. נסתמך על הזהות $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ועל הגדרת הטנגנס:

$$\frac{1}{\cos \alpha} - \cos \alpha = \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} = \sin \alpha \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha \sin \alpha$$

ג. נסתמך על נוסחאות הכפל המקוצר, וזהויות $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$:

$$\begin{aligned} \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha &= (\sin^2 \alpha)^2 - (\cos^2 \alpha)^2 \\ &= (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \\ &= \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha \end{aligned}$$

ד. לפי נוסחאות הסינוס של סכום והפרש:

$$\begin{aligned} \sin^2(\alpha + \beta) &= (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta)^2 \\ &= (\sin \alpha \cos \beta)^2 + 2(\sin \alpha \cos \beta)(\cos \alpha \sin \beta) + (\cos \alpha \sin \beta)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin^2(\alpha - \beta) &= (\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta)^2 \\ &= (\sin \alpha \cos \beta)^2 - 2(\sin \alpha \cos \beta)(\cos \alpha \sin \beta) + (\cos \alpha \sin \beta)^2 \end{aligned}$$

מחיבור שתי הזהויות נקבל

$$\begin{aligned} \sin^2(\alpha + \beta) + \sin^2(\alpha - \beta) &= 2(\sin \alpha \cos \beta)^2 + 2(\cos \alpha \sin \beta)^2 \\ &= 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \beta + 2 \cos^2 \alpha \sin^2 \beta \end{aligned}$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \quad \text{ה. לפי הנוסחה לטנגנס של סכום זוויות,}$$

נחלק את המונה והמכנה ב- $\tan \alpha \tan \beta$:

$$\begin{aligned} \tan(\alpha + \beta) &= \frac{\frac{\tan \alpha}{\tan \alpha \tan \beta} + \frac{\tan \beta}{\tan \alpha \tan \beta}}{\frac{1}{\tan \alpha \tan \beta} - 1} = \frac{\frac{1}{\tan \beta} + \frac{1}{\tan \alpha}}{\frac{1}{\tan \alpha} \cdot \frac{1}{\tan \beta} - 1} \\ &= \frac{\cot \alpha + \cot \beta}{\cot \alpha \cot \beta - 1} \end{aligned}$$

ו. לפי הנוסחה לסינוס של סכום זוויות:

$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \sin \alpha \cos \frac{\pi}{4} + \cos \alpha \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin \alpha + \cos \alpha)$$

נעלה בריבוע וניעזר בזהות שהוכחנו בסעיף א:

$$\sin^2\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \frac{1 + \sin 2\alpha}{2}$$

ז. דרך פתרון אחת היא להסתמך על הזהות שהוכחנו בדוגמה לפני שאלה זו:

$$\tan \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta}$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \tan \frac{\alpha + 0}{2} = \frac{\sin \alpha + \sin 0}{\cos \alpha + \cos 0} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} \quad \text{נציב } \beta = 0 \text{ ונקבל}$$

דרך פתרון נוספת היא בעזרת נוסחאות של זווית כפולה:

$$\sin \alpha = \sin\left(2 \cdot \frac{\alpha}{2}\right) = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$1 + \cos \alpha = 1 + \cos\left(2 \cdot \frac{\alpha}{2}\right) = 1 + \left(2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1\right) = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \tan \frac{\alpha}{2} \quad \text{נציב:}$$

ח. נתון ש- α, β, γ הן זוויות במשולש, ולכן $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. לפיכך:

$$\begin{aligned} \cot \gamma &= \cot(\pi - \alpha - \beta) = \cot(-\alpha - \beta) = -\cot(\alpha + \beta) \\ &= -\frac{\cot \alpha \cot \beta - 1}{\cot \alpha + \cot \beta} = \frac{1 - \cot \alpha \cot \beta}{\cot \alpha + \cot \beta} \end{aligned}$$

$$\cot \gamma (\cot \alpha + \cot \beta) = 1 - \cot \alpha \cot \beta \quad \text{נכפיל במכנה:}$$

$$\cot \alpha \cot \beta + \cot \alpha \cot \gamma + \cot \beta \cot \gamma = 1 \quad \text{נפתח סוגריים ונעביר אגפים:}$$

השאלה בעמוד 37

תשובה 26

א. נתונה המשוואה: $\sin x = -\sqrt{2}/2$. מתקיים

$$-\sqrt{2}/2 = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\arcsin(-\sqrt{2}/2) = -\frac{\pi}{4}, \quad -\pi/4 \in [-\pi/2, \pi/2] \quad \text{ומכיוון ש-}$$

$$\frac{5\pi}{4} = \pi - \left(-\frac{\pi}{4}\right) <$$

$$\{x \mid x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k \text{ או } x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}\} \quad \text{לכן פתרונות המשוואה הם}$$

ב. נתונה המשוואה: $\tan x = 5$

$$x_1 = \arctan 5 \approx 1.373 \approx 78.79^\circ \quad \text{נגדיר, ונחשב בעזרת מחשבון:}$$

$$\{x_1 + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\} \quad \text{פתרונות המשוואה הם}$$

ג. נתונה המשוואה: $\cos x = \cos 1000^\circ$.

ממחזוריות וזוגיות הפונקציה $\cos x$ נקבל

$$\cos 1000^\circ = \cos(1000^\circ - 3 \cdot 360^\circ) = \cos(-80^\circ) = \cos 80^\circ$$

$$\arccos(\cos 1000^\circ) = \arccos(\cos 80^\circ) = 80^\circ \quad \text{לכן}$$

$$\{\pm 80^\circ + 360^\circ k \mid k \in \mathbb{Z}\} \quad \text{פתרונות המשוואה הם}$$

ד. נתונה המשוואה: $\cot x = \cot 500^\circ$.

ממחזוריות הפונקציה $\cot$ נקבל

$$\cot 500^\circ = \cot(500^\circ - 2 \cdot 180^\circ) = \cot 140^\circ$$

$$\operatorname{arccot}(\cot 500^\circ) = \operatorname{arccot}(\cot 140^\circ) = 140^\circ \quad \text{לכן}$$

$$\{140^\circ + 180^\circ k \mid k \in \mathbb{Z}\} \quad \text{פתרונות המשוואה הם}$$

תשובה 27

א. נתונה המשוואה: $\tan 8x = 3$

נקבל באופן מיידי:

$$\Leftrightarrow 8x = \arctan 3 + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\arctan 3}{8} + \frac{\pi}{8} k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\left\{ \frac{\arctan 3}{8} + \frac{\pi}{8} k \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \text{קבוצת הפתרונות היא}$$

ב. נתונה המשוואה: $\sin x \cos(x + 20^\circ) = 0.2$

לפי הזהויות של מכפלת פונקציות טריגונומטריות:

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\sin(x + (x + 20^\circ)) + \sin(x - (x + 20^\circ))) = 0.2$$

$$\Leftrightarrow \sin(2x + 20^\circ) + \sin(-20^\circ) = 0.4$$

$$\Leftrightarrow \sin(2x + 20^\circ) = 0.4 - \sin(-20^\circ) = 0.4 + \sin 20^\circ$$

$$\Leftrightarrow 2x + 20^\circ = \arcsin(0.4 + \sin 20^\circ) + 360^\circ k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 2x + 20^\circ = 180^\circ - \arcsin(0.4 + \sin 20^\circ) + 360^\circ k, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{או:}$$

$$\Leftrightarrow x = \arcsin(0.4 + \sin 20^\circ)/2 - 10^\circ + 180^\circ k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = 80^\circ - \arcsin(0.4 + \sin 20^\circ)/2 + 180^\circ k, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{או:}$$

$$x_1 = \arcsin(0.4 + \sin 20^\circ)/2 - 10^\circ \approx 13.95^\circ$$

$$x_2 = 80^\circ - \arcsin(0.4 + \sin 20^\circ)/2 \approx 56.05^\circ$$

נסמן:

$$\{x_1 + 180^\circ k \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{x_2 + 180^\circ k \mid k \in \mathbb{Z}\} \quad \text{קבוצת הפתרונות היא}$$

◁ פונקציית הקוסינוס ההפוכה
הוגדרה כפונקציה ההפוכה
לפונקציית הקוסינוס בקטע
. $[0, \pi] = [0, 180^\circ]$

◁ פונקציית הקוטנגנס ההפוכה
הוגדרה כפונקציה ההפוכה
לפונקציית הקוטנגנס בקטע
. $(0, \pi) = (0, 180^\circ)$

השאלה בעמוד 39

ג. נתונה המשוואה: $\tan(x + 30^\circ) = \tan x + 2$

לפי הזהויות עבור סכום זוויות:

$$\Leftrightarrow \frac{\tan x + \tan 30^\circ}{1 - \tan x \tan 30^\circ} = \tan x + 2$$

$$\Leftrightarrow \tan x + \tan 30^\circ = (\tan x + 2)(1 - \tan x \tan 30^\circ)$$

נסמן:

$$t = \tan x, a = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

נקבל:

$$\Leftrightarrow t + a = (t + 2)(1 - at)$$

$$\Leftrightarrow t + a = t - at^2 + 2 - 2at$$

$$\Leftrightarrow at^2 + 2at + a - 2 = 0$$

נפתור את המשוואה הריבועית:

נחשב את הדיסקרימיננטה -

$$D = (2a)^2 - 4a(a - 2) = 8a$$

נגדיר:

$$t_1 = \frac{-2a + \sqrt{8a}}{2a}, t_2 = \frac{-2a - \sqrt{8a}}{2a}$$

המשוואה המקורית שקולה ל:

$$\Leftrightarrow t = t_1 \text{ או } t = t_2$$

$$\Leftrightarrow \tan x = t_1 \text{ או } \tan x = t_2$$

$$\Leftrightarrow x = \arctan t_1 + 180^\circ k, k \in \mathbb{Z} \text{ או } x = \arctan t_2 + 180^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

נגדיר:

$$x_1 = \arctan t_1 \approx 40.74^\circ, x_2 = \arctan t_2 \approx -70.74^\circ$$

קבוצת הפתרונות היא

$$\{x_1 + 180^\circ k \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{x_2 + 180^\circ k \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

ד. נתונה המשוואה: $\tan x + 2 \cot x = 3$

נגדיר: $t = \tan x$. אז $\cot x = 1/\tan x = 1/t$, ומתקבלת המשוואה השקולה

$$\Leftrightarrow t + \frac{2}{t} = 3$$

מהמשוואה המקורית נובע ש- $\cot x$ מוגדר, ולכן $t \neq 0$.

נכפול ב- t ונקבל משוואה שקולה:

$$\Leftrightarrow t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t - 1)(t - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 1 \text{ או } t = 2$$

$$\Leftrightarrow \tan x = 1 \text{ או } \tan x = 2$$

$$\Leftrightarrow x = \arctan 1 + 180^\circ k, k \in \mathbb{Z} \text{ או } x = \arctan 2 + 180^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

נגדיר:

$$x_1 = \arctan 1 = 45^\circ, x_2 = \arctan 2 \approx 63.43^\circ$$

קבוצת הפתרונות היא

$$\{x_1 + 180^\circ k \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{x_2 + 180^\circ k \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

ה. נתונה המשוואה: $\cos^2 x = 1$

בעזרת הזהות $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ נקבל:

$$\Leftrightarrow \sin^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

קבוצת הפתרונות היא $\{\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

פתרון נוסף: $\cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos x = 1$ או $\cos x = -1$

נפתור כל משוואה בנפרד:

$$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

המקרה הראשון שקול לכך ש- x הוא כפולה של π במספר זוגי כלשהו.
 המקרה השני שקול לכך ש- x הוא כפולה של π במספר אי-זוגי כלשהו.
 לכן, שני המקרים ביחד שקולים לכך ש- x הוא כפולה שלמה של π , ומתקבלת קבוצת הפתרונות $\{\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

ו. נתונה המשוואה: $2\sin x + 3\cos x = 1$

נפתור בשיטה שהוצגה בדוגמה השלישית:

$$\Leftrightarrow \sin x + \frac{3}{2}\cos x = \frac{1}{2}$$

נגדיר: $\alpha = \arctan(3/2)$

$$\Leftrightarrow \sin x + \cos x \tan \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin x + \cos x \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin x \cos \alpha + \cos x \sin \alpha = \frac{\cos \alpha}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin(x + \alpha) = \frac{\cos \alpha}{2}$$

$$\Leftrightarrow x + \alpha = \arcsin(\cos \alpha / 2) + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

או: $x + \alpha = 180^\circ - \arcsin(\cos \alpha / 2) + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$

$$\Leftrightarrow x = \arcsin(\cos \alpha / 2) - \alpha + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

או: $x = 180^\circ - \arcsin(\cos \alpha / 2) - \alpha + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$

נגדיר: $x_1 = \arcsin(\cos \alpha / 2) - \alpha \approx -40.21^\circ$

$$x_2 = 180^\circ - \arcsin(\cos \alpha / 2) - \alpha \approx 107.59^\circ$$

קבוצת הפתרונות היא $\{x_1 + 360^\circ k \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{x_2 + 360^\circ k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

ז. נתונה המשוואה: $\sin x \tan(x + 30^\circ) = 0$

נקבל מיידית: $\Leftrightarrow \sin x = 0$ או $\tan(x + 30^\circ) = 0$

נבדוק כל אפשרות בנפרד: $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = 180^\circ k, k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}\tan(x + 30^\circ) = 0 &\Leftrightarrow x + 30^\circ = 180^\circ k, k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow x = -30^\circ + 180^\circ k, k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

לכן המשוואה המקורית שקולה ל:

$$\Leftrightarrow x = 180^\circ k \text{ או } x = -30^\circ + 180^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

קבוצת הפתרונות היא $\{180^\circ k \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-30^\circ + 180^\circ k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

ח. נתונה המשוואה: $\sin x + \sin(x + 20^\circ) = 1$

$$\Leftrightarrow 2 \sin \frac{x + (x + 20^\circ)}{2} \cos \frac{x - (x + 20^\circ)}{2} = 1, \text{ לפי הזהות עבור סכום סינוסים,}$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin(x + 10^\circ) \cos 10^\circ = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin(x + 10^\circ) = \frac{1}{2 \cos 10^\circ}$$

$$\Leftrightarrow x + 10^\circ = \arcsin(1/(2 \cos 10^\circ)) + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x + 10^\circ = 180^\circ - \arcsin(1/(2 \cos 10^\circ)) + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z} \text{ או:}$$

$$\Leftrightarrow x = \arcsin(1/(2 \cos 10^\circ)) - 10^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = 170^\circ - \arcsin(1/(2 \cos 10^\circ)) + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z} \text{ או:}$$

$$x_1 = \arcsin(1/(2 \cos 10^\circ)) - 10^\circ \approx 20.51^\circ$$

נגדיר:

$$x_2 = 170^\circ - \arcsin(1/(2 \cos 10^\circ)) \approx 139.49^\circ$$

קבוצת הפתרונות היא $\{x_1 + 360^\circ k \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{x_2 + 360^\circ k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

השאלה בעמוד 40

תשובה 28

א. נתון האי־שוויון $\cos x > 0.3$

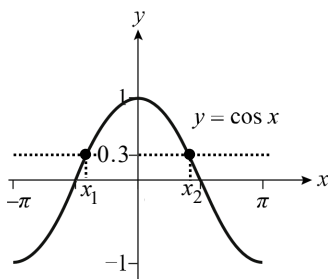
נתבונן בגרף פונקציית הקוסינוס בקטע $[-\pi, \pi]$.

נסמן: $x_2 = \arccos 0.3 \approx 1.266, x_1 = -x_2$

בקטע $[-\pi, \pi]$, האי־שוויון הנתון מתקיים עבור $x_1 < x < x_2$.

באופן כללי, האי־שוויון מתקיים לכל $2\pi k + x_1 < x < 2\pi k + x_2$, עבור k שלם.

קבוצת הפתרונות היא $\{x \mid 2\pi k + x_1 < x < 2\pi k + x_2, k \in \mathbb{Z}\}$



ב. נתון האי־שוויון $\tan x \geq 1$
 נכתוב אותו בצורה שקולה:

$$\Leftrightarrow \tan x \geq \tan \frac{\pi}{4}$$
 נתבונן בפונקציה $\tan$ בקטע $(-\pi/2, \pi/2)$.
 פונקציה זו עולה בקטע, ולכן בקטע זה מתקיים

$$\tan x \geq \tan \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x \geq \frac{\pi}{4}$$
 קבוצת הפתרונות בתוך הקטע היא, לפיכך, $[\pi/4, \pi/2)$.
 פונקציית הטנגנס היא מחזורית, ומחזוריה הוא π . לכן קבוצת הפתרונות המלאה היא

$$\left\{ x \mid \pi k + \frac{\pi}{4} \leq x < \pi k + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

ג. נתון האי־שוויון $\sin x \cos x < 0$

$$\Leftrightarrow 2 \sin x \cos x < 0$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x < 0$$

 נגדיר: $t = 2x$. מתקבל האי־שוויון

$$\Leftrightarrow \sin t < 0$$
 בקטע $[0, 2\pi]$, אי־שוויון זה מתקיים עבור $\pi < t < 2\pi$. ממחזוריות פונקציית הסינוס, נקבל שעבור t ממשי כלשהו, האי־שוויון שקול ל:

$$\Leftrightarrow 2\pi k + \pi < t < 2\pi k + 2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 2\pi k + \pi < 2x < 2\pi k + 2\pi, k \in \mathbb{Z} \quad \text{נחזור למשתנה המקורי:}$$

$$\Leftrightarrow \pi k + \frac{\pi}{2} < x < \pi k + \pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\left\{ x \mid \pi k + \frac{\pi}{2} < x < \pi k + \pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \text{קבוצת הפתרונות היא}$$

השאלה בעמוד 41

תשובה 29

$$\frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} \quad \text{א. נוכיח את הזהות:}$$

נוכל להניח ש־ $1 - \cos \alpha \neq 0$, $\sin \alpha \neq 0$.

תחת הנחה זו, נכפול באלכסון ונקבל זהות שקולה:

$$\Leftrightarrow \sin^2 \alpha = (1 + \cos \alpha)(1 - \cos \alpha)$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

שוויון זה מתקיים לכל α , ולכן גם השוויון המבוקש מתקיים.

ב. נוכיח את הזהות: $\cos \alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha = \frac{\sin 8\alpha}{8\sin \alpha}$

לפי הזהות של סינוס זווית כפולה,

$$\begin{aligned}\sin 8\alpha &= \sin(2 \cdot 4\alpha) = 2\sin 4\alpha \cos 4\alpha = 2\sin(2 \cdot 2\alpha) \cos 4\alpha \\ &= 2 \cdot 2\sin 2\alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha \\ &= 4 \cdot 2\sin \alpha \cos \alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha \\ &= 8\sin \alpha \cos \alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha\end{aligned}$$

בהנחה ש- $\sin \alpha \neq 0$, נחלק ב- $8\sin \alpha$ ונקבל את הזהות המבוקשת.

ג. נוכיח: $\cot 2\alpha = \frac{\cot \alpha - \tan \alpha}{2}$

נתחיל מהאגף הימני:

$$\begin{aligned}\frac{\cot \alpha - \tan \alpha}{2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right) = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{2\sin \alpha \cos \alpha} \\ &= \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \cot 2\alpha\end{aligned}$$

כפי שרצינו להוכיח.

ד. נוכיח את הזהות: $\frac{\sin^3 \alpha - \cos^3 \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \sin \alpha \cos \alpha + 1$

ניעזר בזהות: $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

נקבל:

$$\begin{aligned}\sin^3 \alpha - \cos^3 \alpha &= (\sin \alpha - \cos \alpha)(\sin^2 \alpha + \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha) \\ &= (\sin \alpha - \cos \alpha)(1 + \sin \alpha \cos \alpha)\end{aligned}$$

בהנחה ש- $\sin \alpha - \cos \alpha \neq 0$, נחלק בביטוי זה, ונקבל את השוויון המבוקש.

ה. נוכיח את הזהות: $\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot \alpha$

לפי הנוסחאות עבור סכום זוויות,

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sin \frac{\pi}{2} \cos \alpha + \cos \frac{\pi}{2} \sin \alpha = \cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \frac{\pi}{2} \cos \alpha - \sin \frac{\pi}{2} \sin \alpha = -\sin \alpha$$

לכן $\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \frac{\sin(\pi/2 + \alpha)}{\cos(\pi/2 + \alpha)} = \frac{\cos \alpha}{-\sin \alpha} = -\cot \alpha$

השאלה בעמוד 41

תשובה 30

א. נתון ש- $13\pi/2 < \alpha < 7\pi$ ו- $\cos \alpha = -2/7$.

נגדיר: $\alpha' = \alpha - 6\pi$. נקבל:

$$\frac{13}{2}\pi - 6\pi < \alpha' < \pi$$

כלומר,

$$\frac{\pi}{2} < \alpha' < \pi$$

הזווית α' נמצאת ברביע השני. יחד עם מחזוריות פונקציית הסינוס, נקבל

$$\sin \alpha = \sin \alpha' > 0$$

כעת ניעזר בזהות: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. ממנה נובע:

$$\sin^2 \alpha + \left(-\frac{2}{7}\right)^2 = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \frac{4}{49} = \frac{45}{49}$$

לפיכך:

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{45}{49}} = \frac{\sqrt{9 \cdot 5}}{7} = \frac{3\sqrt{5}}{7}$$

ב. נתון ש- $3\pi/2 < \alpha < 2\pi$ ו- $\tan \alpha = -5$. הזווית α נמצאת ברביע הרביעי, ולכן $\sin \alpha < 0$. ניעזר בזהות (ראו שאלה 33):

$$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

במקרה הנתון:

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = -\frac{1}{5} \Rightarrow \frac{1}{\sin^2 \alpha} = 1 + \left(-\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{26}{25}$$

מכאן נובע:

$$\sin^2 \alpha = \frac{25}{26} \Rightarrow \sin \alpha = -\sqrt{\frac{25}{26}} = \frac{-5}{\sqrt{26}}$$

השאלה בעמוד 41

תשובה 31

א. נתון: $a = 7, b = 5, c = 4$

(האיור להמחשת הסימונים בלבד).

לפי משפט הקוסינוסים:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \Rightarrow \cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{29}{35}$$

לכן (היות ש- $\gamma \in [0, 180^\circ]$), והפונקציה $\arccos$ הפוכה לפונקציית הקוסינוס בקטע זה):

$$\gamma = \arccos \frac{29}{35} \approx 34.05^\circ$$

באופן דומה,

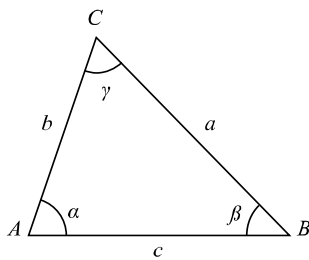
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{29}{35} = -\frac{1}{5}$$

ולכן

$$\alpha = \arccos\left(-\frac{1}{5}\right) \approx 101.54^\circ$$

לבסוף,

$$\beta = 180^\circ - \alpha - \gamma \approx 44.42^\circ$$



ב. נתון: $a = 3, b = 4, \gamma = 50^\circ$

לפי משפט הקוסינוסים,

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma} \approx 3.09$$

שוב לפי משפט הקוסינוסים,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \approx 0.6696$$

$$\Rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) \approx 47.97^\circ$$

לבסוף, $\beta = 180^\circ - \alpha - \gamma \approx 82.03^\circ$

ג. נתון: $a = 3, b = 5, \alpha = 30^\circ$

לפי משפט הסינוסים: $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} \Rightarrow \sin \beta = \frac{b \sin \alpha}{a} = \frac{5 \cdot 0.5}{3} = \frac{5}{6}$

למשוואה $\sin \beta = 5/6$ יש שני פתרונות אפשריים בקטע $(0, 180^\circ)$:

$$\beta_1 = \arcsin \frac{5}{6} \approx 56.44^\circ, \quad \beta_2 = 180^\circ - \beta_1 \approx 123.56^\circ$$

נבדוק כל אפשרות בנפרד:

אם $\beta = \beta_1$ אז $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta \approx 93.56^\circ$, וממשפט הקוסינוסים נקבל:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma} \approx 5.99$$

אורכי הצלעות a, b, c שקיבלנו מקיימים את תנאי אי-שוויון המשולש, ולכן (לפי משפט 8.13) ניתן לבנות משולש שאלה הם אורכי צלעותיו.

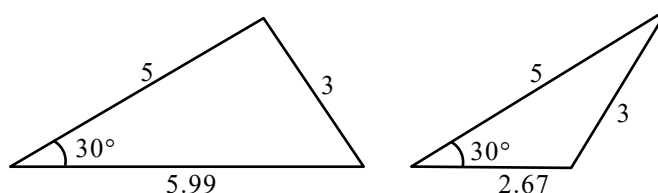
בעזרת משפט הקוסינוסים ניתן לוודא שהזווית α במשולש שבנינו היא אכן 30° . לכן מצאנו אפשרות אחת להשלמת המשולש.

כעת נתבונן באפשרות $\beta = \beta_2$. במקרה זה נקבל $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta \approx 26.44^\circ$,

וכמקודם, נסיק: $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma} \approx 2.67$

גם במקרה זה אורכי הצלעות: 3, 5, 2.67 מקיימים את תנאי אי-שוויון המשולש, ולכן ניתן לבנות משולש שאלה הם אורכי צלעותיו. גם במקרה זה נוכל לוודא בעזרת משפט הקוסינוסים שהזווית α במשולש זה היא 30° .

מצאנו אפוא שתי אפשרויות, האחת משולש חד-זוויות, והשנייה משולש קה-זוויות:



השאלה בעמוד 41

תשובה 32

נתון שהמרובע $ABCD$ חסום במעגל, ונתונות הצלעות:

$$\overline{AB} = 2, \overline{BC} = 3, \overline{CD} = 4, \overline{DA} = 5$$

נסמן $\alpha = \angle A$, $\gamma = \angle C$. לפי משפט 8.42, סכום זוויות נגדיות במרובע חסום במעגל הוא 180° . לכן $\alpha + \gamma = 180^\circ$, כלומר $\gamma = 180^\circ - \alpha$. מכאן,

$$\cos \gamma = \cos(180^\circ - \alpha) = \cos 180^\circ \cos \alpha + \sin 180^\circ \sin \alpha = -\cos \alpha$$

לפי משפט הקוסינוסים, נקבל –

$$\overline{BD}^2 = 2^2 + 5^2 - 20 \cos \alpha = 29 - 20 \cos \alpha \quad \text{מהמשולש } \triangle ABD$$

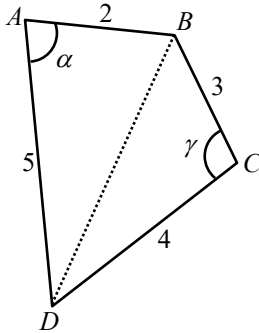
$$\overline{BD}^2 = 3^2 + 4^2 - 24 \cos \gamma = 25 + 24 \cos \alpha \quad \text{ומהמשולש } \triangle CBD$$

$$29 - 20 \cos \alpha = 25 + 24 \cos \alpha \quad \text{לכן:}$$

$$\Rightarrow 44 \cos \alpha = 4 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{4}{44} = \frac{1}{11}$$

$$\overline{BD}^2 = 29 - 20 \cos \alpha = 29 - \frac{20}{11} = \frac{299}{11} \quad \text{נציב:}$$

$$\overline{BD} = \sqrt{\frac{299}{11}} \approx 5.21 \quad \text{לכן}$$



השאלה בעמוד 41

תשובה 33

נסמן את צלעות המשולש ב- a, b, c ואת הזוויות שמולן ב- α, β, γ , בהתאמה.

א. נניח ש- $\alpha > \beta$, ונוכיח ש- $a > b$:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = 2R \quad \text{יהי } R \text{ רדיוס המעגל החוסם. לפי משפט הסינוסים,}$$

$$a = 2R \sin \alpha, \quad b = 2R \sin \beta \quad \text{ולכן}$$

נתבונן בנפרד במקרים הבאים:

מקרה ראשון – $\alpha < 90^\circ$, כלומר, α היא זווית חדה.

במקרה זה גם $\beta < 90^\circ$. פונקציית הסינוס עולה בקטע $[0, 90^\circ]$ ולכן מהאי־שוויון $\alpha > \beta$ נובע ש- $\sin \alpha > \sin \beta$. מכאן, $2R \sin \alpha > 2R \sin \beta$, כלומר $a > b$.

מקרה שני – $\alpha \geq 90^\circ$, כלומר, α היא זווית ישרה או קהה.

במקרה זה, מכיוון ש- $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, מתקיים

$$\beta + \gamma = 180^\circ - \alpha \leq 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

$$0^\circ < \beta < \beta + \gamma \leq 90^\circ \quad \text{מכאן:}$$

$$\sin \beta < \sin(\beta + \gamma) \quad \text{ומכיוון שפונקציית הסינוס עולה בקטע } [0, 90^\circ],$$

$$\sin(\beta + \gamma) = \sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha \quad \text{אבל,}$$

$$\text{ולכן } \sin \alpha > \sin \beta, \text{ וכמקודם נסיק ש- } a > b.$$

□

ב. הוכחנו שאם $\alpha > \beta$ אז $a > b$.

קעת, נוכיח את הכיוון ההפוך: שאם $a > b$ אז $\alpha > \beta$.

נניח ש- $a > b$. אם $\alpha < \beta$ אז מהסעיף הקודם נקבל ש- $a < b$, בסתירה להנחה.

אם $\alpha = \beta$ אז לפי משפט 8.23, משוויון הזוויות נובע שוויון הצלעות שמולן, כלומר

$a = b$, שוב בסתירה להנחה. לכן ייתכן רק ש- $\alpha > \beta$. $\square$

תשובה 34

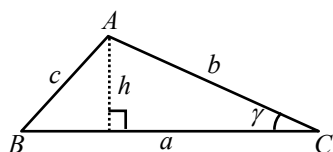
א. נתבונן במשולש $\triangle ABC$ שבאיור, ויהי h הגובה לצלע BC .

מהגדרת הפונקציות הטריגונומטריות במשולש ישר-זווית,

$$\sin \gamma = \frac{h}{b} \Rightarrow h = b \sin \gamma$$

$$S = \frac{ah}{2} = \frac{ab \sin \gamma}{2}$$

שטח המשולש הוא



ב. יהי R רדיוס המעגל החוסם את המשולש $\triangle ABC$.

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = 2R$$

לפי משפט הסינוסים מתקיים:

$$a = 2R \sin \alpha, \quad b = 2R \sin \beta$$

ולכן

נציב ערכים אלה בנוסחה שקיבלנו בסעיף א:

$$S = \frac{ab \sin \gamma}{2} = \frac{2R \sin \alpha \cdot 2R \sin \beta \cdot \sin \gamma}{2} = 2R^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$$

תשובה 35

א. נתונה המשוואה:

$$2 \tan x + \frac{3}{\cos^2 x} = 5$$

$$\Leftrightarrow 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \text{ניעזר בזוהות:}$$

$$\Leftrightarrow 2 \tan x + 3(1 + \tan^2 x) = 5 \quad \text{מתקבלת המשוואה השקולה}$$

$$\Leftrightarrow 2t + 3(1 + t^2) = 5 \quad \text{נסמן } t = \tan x \text{ מתקבלת המשוואה השקולה:}$$

$$\Leftrightarrow 3t^2 + 2t - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 24}}{6} = \frac{-1 \pm \sqrt{7}}{3} \quad \text{נפתור את המשוואה הריבועית:}$$

$$t_1 = \frac{-1 + \sqrt{7}}{3}, \quad t_2 = \frac{-1 - \sqrt{7}}{3} \quad \text{נגדיר:}$$

$$\Leftrightarrow t = t_1 \text{ או } t = t_2 \quad \text{המשוואה המקורית שקולה ל:}$$

$$\Leftrightarrow \tan x = t_1 \text{ או } \tan x = t_2$$

$$\Leftrightarrow x = \arctan t_1 + 180^\circ k \text{ או } x = \arctan t_2 + 180^\circ k$$

השאלה בעמוד 41

השאלה בעמוד 42

$$x_1 = \arctan t_1 \approx 28.75^\circ, \quad x_2 = \arctan t_2 \approx -50.55^\circ \quad \text{נגדיר:}$$

$$\{x_1 + 180^\circ k \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{x_2 + 180^\circ k \mid k \in \mathbb{Z}\} \quad \text{קבוצת הפתרונות היא}$$

$$\tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = 2 \cos x \quad \text{ב. נתונה המשוואה:}$$

נפתח תחילה, לפי הנוסחאות עבור סכום והפרש זוויות:

$$\begin{aligned} \tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) &= \frac{\sin(3\pi/2 - x)}{\cos(3\pi/2 - x)} = \frac{\sin(3\pi/2)\cos x - \cos(3\pi/2)\sin x}{\cos(3\pi/2)\cos x + \sin(3\pi/2)\sin x} \\ &= \frac{(-1) \cdot \cos x - 0 \cdot \sin x}{0 \cdot \cos x + (-1) \cdot \sin x} = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x} = 2 \cos x \quad \text{מתקבלת המשוואה השקולה:}$$

נתבונן בנפרד במקרים הבאים:

מקרה א: $\cos x = 0$. במקרה זה המשוואה מתקיימת (נשים לב ש- $\sin x \neq 0$ כי $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$). המשוואה $\cos x = 0$ שקולה לכך ש- $x = 90^\circ + 180^\circ k$ עבור $k \in \mathbb{Z}$.

מקרה ב: $\cos x \neq 0$. במקרה זה מתקבלת המשוואה השקולה:

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sin x} = 2 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2}$$

היות ש- $\arcsin(1/2) = 30^\circ$, מתקבל:

$$\Leftrightarrow x = 30^\circ + 360^\circ k \text{ או } x = 150^\circ + 360^\circ k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

ובמקרים אלה אכן מתקיים $\cos x \neq 0$.

מאיחוד הפתרונות בשני המקרים מתקבלת קבוצת הפתרונות המלאה:

$$\begin{aligned} &\{90^\circ + 180^\circ k \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{30^\circ + 360^\circ k \mid k \in \mathbb{Z}\} \\ &\cup \{150^\circ + 360^\circ k \mid k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

ג. נתונה המשוואה: $\sin(2x - 50^\circ)\cos(3x + 60^\circ) = 0$

$$\Leftrightarrow \sin(2x - 50^\circ) = 0 \text{ או } \cos(3x + 60^\circ) = 0 \quad \text{נקבל מיידית:}$$

נבדוק כל אפשרות בנפרד:

$$\sin(2x - 50^\circ) = 0 \Leftrightarrow 2x - 50^\circ = 180^\circ k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = 25^\circ + 90^\circ k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos(3x + 60^\circ) = 0 \Leftrightarrow 3x + 60^\circ = 90^\circ + 180^\circ k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = 10^\circ + 60^\circ k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

לכן המשוואה המקורית שקולה ל:

$$\Leftrightarrow x = 25^\circ + 90^\circ k \text{ או } x = 10^\circ + 60^\circ k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

קבוצת הפתרונות היא $\{25^\circ + 90^\circ k \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{10^\circ + 60^\circ k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$$\sin x \sin 3x = \frac{1}{3} \quad \text{ד. נתונה המשוואה:}$$

לפי זהות המכפלה של שני סינוסים:

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\cos(x - 3x) - \cos(3x + x)) = \frac{1}{3}$$

על פי $\cos(-2x) = \cos 2x$, זוגיות פונקציית הקוסינוס

$$\Leftrightarrow \cos 2x - \cos 4x = \frac{2}{3}$$

נסמן: $t = \cos 2x$. לפי זהויות הקוסינוס של זווית כפולה:

$$\cos 4x = \cos(2 \cdot 2x) = 2\cos^2 2x - 1 = 2t^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow t - 2t^2 + 1 = \frac{2}{3} \quad \text{מתקבלת המשוואה השקולה:}$$

$$\Leftrightarrow 6t^2 - 3t - 1 = 0 \quad \text{נפשט:}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{3 \pm \sqrt{33}}{12}$$

$$t_1 = \frac{3 + \sqrt{33}}{12} \approx 0.809, \quad t_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{4} \approx -0.309 \quad \text{נגדיר:}$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = t_1 \text{ או } \cos 2x = t_2 \quad \text{נחזור למשתנה המקורי:}$$

$$\Leftrightarrow 2x = \pm \arccos t_1 + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \text{ או } 2x = \pm \arccos t_2 + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \pm (\arccos t_1)/2 + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \text{ או } x = \pm (\arccos t_2)/2 + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x_1 = (\arccos t_1)/2 \approx 0.377, \quad x_2 = (\arccos t_2)/2 \approx 0.901 \quad \text{נגדיר:}$$

קבוצת הפתרונות היא $\{x_1 + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{x_2 + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

השאלה בעמוד 42

תשובה 36

א. נתון: $\alpha = 22.5^\circ$. נתבונן בזווית הכפולה: $2\alpha = 45^\circ$.

לפי נוסחאות הקוסינוס של זווית כפולה:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45^\circ = \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2\sin^2 \alpha$$

$$2\cos^2 \alpha - 1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 2\cos^2 \alpha = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{2} \quad \text{לפיכך:}$$

$$\Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$$

הזווית α נמצאת ברביע הראשון, לכן $\cos \alpha > 0$, $\sin \alpha > 0$. לכן

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

$$1 - 2\sin^2 \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 2\sin^2 \alpha = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \quad \text{כמו כן:}$$

$$\Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}} \quad \text{לבסוף,}$$

$$\frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} = \frac{(2 - \sqrt{2})^2}{(2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})} = \frac{(2 - \sqrt{2})^2}{2^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{(2 - \sqrt{2})^2}{2} \quad \text{נפשט:}$$

$$\tan \alpha = \sqrt{\frac{(2 - \sqrt{2})^2}{2}} = \frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1 \quad \text{לכן}$$

הערה: ניתן לחשב את הטנגנס גם לפי הנוסחה שבשאלה 25:

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

ב. נתון: $\alpha = 15^\circ$. ניתן לחשב את $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\tan \alpha$ בשיטה שבסעיף א (כי $2\alpha = 30^\circ$)

וערך הקוסינוס בזווית זו ידוע). נציג דרך פשוטה יותר:

$$\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ$$

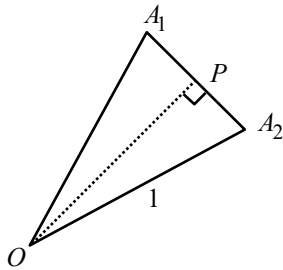
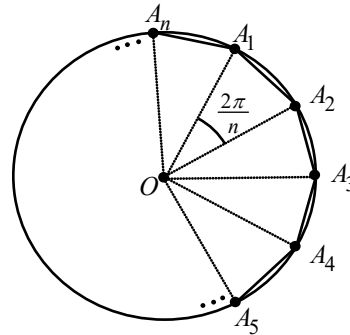
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\tan 15^\circ = \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2}{(\sqrt{6} + \sqrt{2})(\sqrt{6} - \sqrt{2})} \quad \text{מכאן}$$

$$= \frac{8 - 2\sqrt{12}}{6 - 2} = \frac{8 - 4\sqrt{3}}{4} = 2 - \sqrt{3}$$

תשובה 37

נתון מצולע משוכלל בעל n צלעות החסום במעגל שרדיוסו 1. נחשב את היקפו ואת שטחו. נסמן את קודקודי המצולע ב- $A_1, \dots, A_n$ ואת מרכז המעגל ב- O . נסמן ב- a את אורך צלעו של המצולע.



כל המשולשים $\triangle OA_i OA_{i+1}$ חופפים זה לזה (צ.צ.צ), לכן כל הזוויות המרכזיות $\angle A_i OA_{i+1}$ שוות זו לזו. לכן כל זווית כזו שווה בגודלה ל- $2\pi/n$. נתבונן במשולש $\triangle OA_1 OA_2$: הצלע $A_1 A_2$ היא צלע של המצולע המשוכלל, ולכן אורכה הוא a . שתי הצלעות האחרות הן רדיוסים במעגל ולכן אורכן הוא 1. המשולש הוא שווה-שוקיים. נתבונן בגובה OP לצלע $A_1 A_2$. לפי משפט 8.27, קטע זה הוא גם חוצה זווית ותיכון.

$$\angle POA_2 = \frac{\angle A_1 OA_2}{2} = \frac{\pi}{n}; \quad \overline{PA_2} = \frac{\overline{A_1 A_2}}{2} = \frac{a}{2}, \quad \text{לפיכך,}$$

$$\sin \frac{\pi}{n} = \frac{a/2}{1} = \frac{a}{2} \Rightarrow a = 2 \sin \frac{\pi}{n} \quad \text{מכאן}$$

$$P = 2n \sin \frac{\pi}{n} \quad \text{לכן היקף המצולע הוא}$$

שטח המשולש $\triangle OA_1 OA_2$, לפי הנוסחה שהוכחנו בשאלה 33א, הוא:

$$S_{\triangle OA_1 OA_2} = \frac{\overline{OA_1} \cdot \overline{OA_2} \cdot \sin \angle A_1 OA_2}{2} = \frac{1 \cdot 1 \cdot \sin(2\pi/n)}{2} = \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{n}$$

שטח המצולע הוא סכום שטחי n משולשים חופפים למשולש $\triangle OA_1 OA_2$, ולכן

$$S = \frac{n}{2} \sin \frac{2\pi}{n}$$

הערה: ככל שנציב ערכי n גדולים יותר בנוסחאות ההיקף והשטח שפיתחנו, כך יתקרבו היקף המצולע להיקף המעגל החוסם, שהוא 2π , ושטח המצולע לשטח המעגל החוסם, שהוא π . תוכלו להיווכח בכך על ידי הצבת ערכים בנוסחאות. למשל, עבור $n = 100$ נקבל $S = 50 \sin(\pi/50) \approx 3.1395$ ועבור $n = 1000$ נקבל

$$S = 500 \sin(\pi/500) \approx 3.1415719$$

השאלה בעמוד 42

תשובה 38

נוכח באינדוקציה:

$$(*) \quad \sin \alpha + \sin 2\alpha + \dots + \sin n\alpha = \frac{\cos\left(\frac{1}{2}\alpha\right) - \cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\alpha\right)}{2\sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right)}$$

$$\sin \alpha = \frac{\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{3\alpha}{2}}{2\sin \frac{\alpha}{2}}$$

שלב הבדיקה: עלינו לוודא כי

ואכן, לפי נוסחת הפרש הקוסינוסים,

$$\begin{aligned} \cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{3\alpha}{2} &= -2\sin\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{3\alpha}{2}\right)\right)\sin\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{3\alpha}{2}\right)\right) \\ &= -2\sin \alpha \sin \frac{-\alpha}{2} = 2\sin \alpha \sin \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

< לפי אי-זוגיות פונקציית הסינוס

וחלוקה ב- $\sin(\alpha/2)$ נותנת את השוויון המבוקש.

שלב המעבר: נניח שהשוויון (*) מתקיים. נסיק -

$$\begin{aligned} &\sin \alpha + \sin 2\alpha + \dots + \sin n\alpha + \sin(n+1)\alpha \\ &= \frac{\cos\left(\frac{1}{2}\alpha\right) - \cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\alpha\right)}{2\sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right)} + \sin(n+1)\alpha \\ &= \frac{\cos\left(\frac{1}{2}\alpha\right) - \cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\alpha\right) + 2\sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right)\sin(n+1)\alpha}{2\sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right)} \end{aligned}$$

נפשט את המונה בביטוי שקיבלנו: לפי נוסחת מכפלת הסינוסים,

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right)\sin(n+1)\alpha &= \frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{2}\alpha - (n+1)\alpha\right) - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{2}\alpha + (n+1)\alpha\right) \\ &= \frac{1}{2}\cos\left(-\left(n + \frac{1}{2}\right)\alpha\right) - \frac{1}{2}\cos\left(\left(n + 1 + \frac{1}{2}\right)\alpha\right) \end{aligned}$$

< לפי זוגיות פונקציית הקוסינוס

$$2\sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right)\sin(n+1)\alpha = \cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\alpha\right) - \cos\left(\left(n + 1 + \frac{1}{2}\right)\alpha\right) \quad \text{מכאן}$$

והמונה הוא

$$\begin{aligned} &\cos\left(\frac{1}{2}\alpha\right) - \cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\alpha\right) + \cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\alpha\right) - \cos\left(\left(n + 1 + \frac{1}{2}\right)\alpha\right) \\ &= \cos\left(\frac{1}{2}\alpha\right) - \cos\left(\left(n + 1 + \frac{1}{2}\right)\alpha\right) \end{aligned}$$

$$\sin \alpha + \sin 2\alpha + \dots + \sin(n+1)\alpha = \frac{\cos\left(\frac{1}{2}\alpha\right) - \cos\left(\left(n + 1 + \frac{1}{2}\right)\alpha\right)}{2\sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right)}, \quad \text{כלומר,}$$

וצעד האינדוקציה הושלם.

פתרונות לשאלות בשיעור 10

תשובה 1

א. (i) נתונות הנקודות (1,1) ו- (2,4). שיפוע הישר העובר דרכן הוא

$$\frac{4-1}{2-1} = 3$$

נכתוב את משוואת הישר העובר דרך (1,1) ובעל שיפוע 3:

$$y = 3(x - 1) + 1$$

$$y = 3x - 2 \quad \text{כלומר:}$$

$$3x - y = 2 \quad \text{נעביר אגפים:}$$

וזו משוואת הישר המבוקש.

(ii) נתונות הנקודות (5,-2) ו- (7,3). שיפוע הישר העובר דרכן הוא

$$\frac{3 - (-2)}{7 - 5} = \frac{5}{2}$$

נכתוב את משוואת הישר העובר דרך (7,3) ובעל שיפוע 5/2:

$$y = \frac{5}{2}(x - 7) + 3$$

$$2y = 5x - 29 \quad \text{כלומר:}$$

$$5x - 2y = 29 \quad \text{נעביר אגפים:}$$

וזו משוואת הישר המבוקש.

(iii) נתונות הנקודות (1,4) ו- (1,-2). שיעור x זהה בשתייהן.

הישר האנכי $x = 1$ עובר דרך שתי הנקודות. לכן הוא הישר המבוקש.

ניתן לבטא את משוואתו כך: $1 \cdot x + 0 \cdot y = 1$.

(iv) נתונות הנקודות (10,6) ו- (2,6). שיעור y זהה בשתייהן.

הישר האופקי $y = 6$ עובר דרך שתי הנקודות. לכן הוא הישר המבוקש.

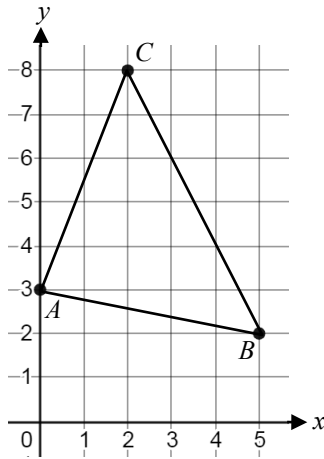
ניתן לבטא את משוואתו כך: $0 \cdot x + 1 \cdot y = 6$.

ב. (i) נתון הישר: $2x + 3y = 5$

$$y = \frac{5 - 2x}{3} = \left(-\frac{2}{3}\right)x + \frac{5}{3} \quad \text{נבטא את משוואתו כך:}$$

שיפוע הישר הוא $-2/3$.

(ii) נתון הישר: $y = 3$. נבטא: $y = 0 \cdot x + 3$. שיפוע הישר הוא 0.



$$A = (0,3), B = (5,2), C = (2,8)$$

ג. נתונים קודקודי המשולש:

$$\frac{3-2}{0-5} = -\frac{1}{5}$$

שיפוע הצלע AB הוא

$$\frac{8-2}{2-5} = \frac{6}{-3} = -2$$

שיפוע הצלע BC הוא

$$\frac{8-3}{2-0} = \frac{5}{2}$$

שיפוע הצלע AC הוא

תשובה 2

א. נתונים הישרים $x + 3y = 1$ ו- $2x - y = 4$.

כדי למצוא את נקודת החיתוך שלהם, נפתור את מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x + 3y = 1 \end{cases}$$

מהמשוואה הראשונה נקבל: $y = 2x - 4$.

$$x + 3(2x - 4) = 1 \Rightarrow 7x = 13 \Rightarrow x = \frac{13}{7}$$

נציב במשוואה השנייה:

$$y = 2 \cdot \frac{13}{7} - 4 = -\frac{2}{7}$$

נמצא את y :

נקודת החיתוך של הישרים היא $(13/7, -2/7)$.

ב. נתונים הישרים: $x = 5$ ו- $2x + y = 4$.

כדי למצוא את נקודת החיתוך שלהם, נפתור את מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x = 5 \end{cases}$$

$$2 \cdot 5 + y = 4 \Rightarrow y = -6$$

נציב $x = 5$ במשוואה הראשונה:

נקודת החיתוך של הישרים היא $(5, -6)$.

ג. נתונים הישרים: $2x = 3y$, $x - y = 1$, $x + y = 1$.

צלעות המשולש מונחות על ישרים אלה. כדי למצוא את קודקודי המשולש, נמצא את

נקודת החיתוך של כל זוג ישרים מבין השלושה.

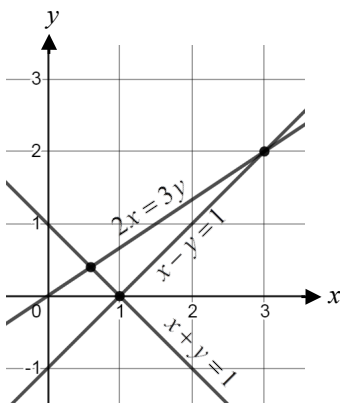
$$\begin{cases} 2x = 3y \\ x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{3}{2}y \Rightarrow \frac{3}{2}y - y = 1 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow x = 3$$

$$\begin{cases} 2x = 3y \\ x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{3}{2}y \Rightarrow \frac{3}{2}y + y = 1 \Rightarrow y = \frac{2}{5} \Rightarrow x = \frac{3}{5}$$

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 0$$

קודקודי המשולש הם $(1,0)$, $(3/5, 2/5)$, $(3, 2)$.

השאלה בעמוד 48



השאלה בעמוד 50

תשובה 3

א. נתון הישר: $2x + 4y = 3$.

נבטא את משוואת הישר באופן שקול:

$$\Leftrightarrow 4y = 3 - 2x$$

$$\Leftrightarrow y = \left(-\frac{1}{2}\right)x + \frac{3}{4}$$

שיפוע הישר הוא $-1/2$.

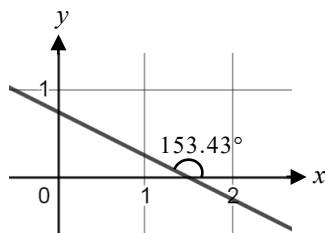
הזווית α שבין ישר זה לבין ציר ה- x מקיימת:

$$\tan \alpha = -\frac{1}{2}$$

הפתרון הכללי של משוואה זו הוא: $\alpha = \arctan\left(-\frac{1}{2}\right) + 180^\circ k, k \in \mathbb{Z}$

הזווית α מקיימת: $0 \leq \alpha < 180^\circ$. כמו כן, $\arctan(-1/2) \approx -26.57^\circ$. לכן

$$\alpha = \arctan\left(-\frac{1}{2}\right) + 180^\circ \approx 153.43^\circ$$



ב. אנו מחפשים ישר העובר דרך הנקודה $(-2, 1)$ ויוצר זווית של 60° עם ציר ה- x .

שיפוע הישר הוא $a = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$

לכן משוואת הישר היא $y = a(x - (-2)) + 1 = \sqrt{3}(x + 2) + 1$

כלומר $y = \sqrt{3}x + 2\sqrt{3} + 1$

השאלה בעמוד 51

תשובה 4

א. נחשב את שיפוע הישר $x + 3y = 6$:

$$x + 3y = 6 \Leftrightarrow 3y = 6 - x \Leftrightarrow y = \left(-\frac{1}{3}\right)x + 2$$

שיפוע הישר הוא $-1/3$.

נחשב את שיפוע הישר $2x - y = 3$:

$$2x - y = 3 \Leftrightarrow y = 2x - 3$$

שיפוע הישר הוא 2.

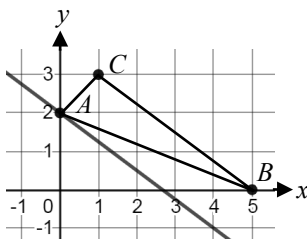
לשני הישרים יש שיפועים שונים, ולכן הם אינם מקבילים.

ב. נסמן ב- ℓ את הישר העובר דרך הנקודות $(2, 0)$ ו- $(3, 5)$.

שיפועו של ℓ הוא: $a = \frac{5-0}{3-2} = 5$

נסמן ב- m את הישר $y = 5x + 1$. השיפוע של m שווה גם הוא ל-5, לכן הישרים מקבילים או מתלכדים.

נתבונן בנקודה $(2, 0)$. נקודה זו לא נמצאת על הישר m , כי $0 \neq 5 \cdot 2 + 1$. נקודה זו נמצאת על הישר ℓ , לפי הגדרתו. לכן שני הישרים שונים, ומכאן שהם מקבילים.



ג. נתון משולש $\triangle ABC$ בעל הקודקים $A = (0,2)$, $B = (5,0)$, $C = (1,3)$

$$\frac{3-0}{1-5} = -\frac{3}{4}$$

שיפוע הצלע BC הוא

לישר המקביל לצלע BC , ועובר דרך הקודקוד $A = (0,2)$ יש שיפוע זהה לשיפוע של

$$y = -\frac{3}{4}(x-0) + 2$$

BC , כלומר, $-3/4$. משוואת הישר היא

$$y = 2 - \frac{3}{4}x$$

כלומר

$$3x + 4y = 8$$

או

השאלה בעמוד 54

תשובה 5

א. נתונים הישר ℓ שמשוואתו $x + 2y = 1$, והנקודה $P = (-1, -3)$.

משוואת הישר ℓ שקולה למשוואה $y = (-1/2)x + 1/2$ ולכן שיפועו הוא $-1/2$.

מכפלת שיפועי ישרים מאונכים שווה ל-1, לכן השיפוע של ישר מאונך ל- ℓ הוא 2.

יהי m האנך לישר ℓ דרך הנקודה P . שיפועו של m הוא 2, לכן משוואתו היא

$$y = 2(x - (-1)) + (-3)$$

$$y = 2x - 1$$

כלומר:

ב. היטל הנקודה P על הישר ℓ הוא חיתוך הישר ℓ עם האנך ל- ℓ דרך P , כלומר חיתוך

הישרים ℓ ו- m . כדי למצוא את שיעוריה של נקודה זו, נפתור את מערכת המשוואות

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$$

$$x + 2(2x - 1) = 1 \Rightarrow 5x = 3 \Rightarrow x = 3/5$$

מהצבת $y = 2x - 1$ נקבל:

$$y = 2 \cdot \frac{3}{5} - 1 = \frac{1}{5}$$

ולכן

ההיטל הוא $(3/5, 1/5)$.

ג. נסמן: $A = (0,0)$, $B = (3,4)$, $C = (1,3)$

$$\frac{4-0}{3-0} = \frac{4}{3}$$

שיפוע הצלע AB הוא

$$-1 : \frac{4}{3} = -\frac{3}{4}$$

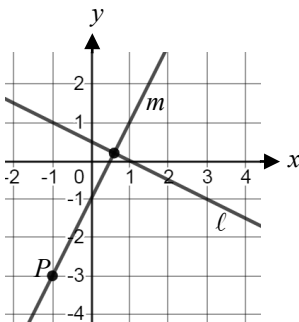
לכן שיפוע הגובה אל הצלע AB הוא

הגובה עובר דרך הקודקוד $C = (1,3)$. לכן משוואתו היא

$$y = \frac{-3}{4}(x-1) + 3$$

$$y = \frac{15}{4} - \frac{3}{4}x$$

כלומר:



$$\frac{3-0}{1-0} = 3$$

שיפוע הצלע AC הוא

לכן שיפוע הגובה אל הצלע AC הוא $-1/3$. גובה זה עובר דרך $B = (3, 4)$, ומשוואתו

$$y = \frac{-1}{3}(x-3) + 4 = 5 - \frac{x}{3} \quad \text{היא}$$

נמצא את נקודת מפגש הגבהים ל- AC, BC : נפתור את המערכת

$$\begin{cases} y = \frac{15}{4} - \frac{3}{4}x \\ y = 5 - \frac{x}{3} \end{cases}$$

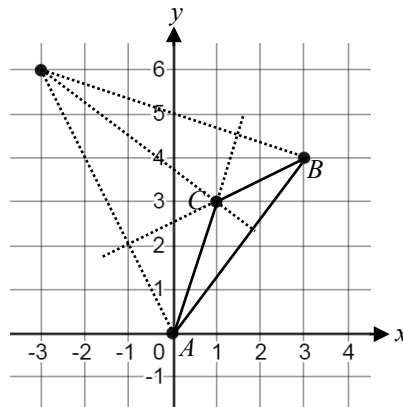
$$\frac{15}{4} - \frac{3}{4}x = 5 - \frac{x}{3} \Rightarrow x\left(\frac{1}{3} - \frac{3}{4}\right) = 5 - \frac{15}{4}$$

$$x \cdot \frac{4-9}{12} = \frac{20-15}{4} \Rightarrow x \cdot \frac{-5}{12} = \frac{5}{4} \Rightarrow x = -3 \quad \text{מכאן}$$

$$y = 5 - \frac{x}{3} = 6 \quad \text{ולכן}$$

מצאנו שהגבהים לצלעות AC, BC נפגשים בנקודה $(-3, 6)$. לפי משפט 8.25, כל גובהי המשולש נפגשים בנקודה אחת, לכן נקודה זו היא מפגש גובהי המשולש.

נקודה זו נמצאת מחוץ למשולש, כי המשולש הוא קהה-זווית:



השאלה בעמוד 54

תשובה 6

א. נתונים הישר $y = 5 - 2x$, והישר $2x - 3y = 4$, הניתן להצגה כך:

$$y = \frac{2x-4}{3} = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$$

שיפוע הישר הראשון הוא $m_1 = -2$ ושיפוע הישר השני הוא $m_2 = 2/3$.

נסמן ב- α את הזווית הקטנה שבין הישרים. לפי הנוסחה לזווית בין ישרים:

$$\tan \alpha = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right| = \left| \frac{-2 - \frac{2}{3}}{1 + (-2)\left(\frac{2}{3}\right)} \right| = \left| \frac{-8}{3} : \frac{-1}{3} \right| = 8$$

$$\alpha = \arctan 8 \approx 82.87^\circ$$

לפיכך:

ב. נתונים הקודקודים: $A = (0,0), B = (3,4), C = (1,3)$
 (זהים לקודקודים בשאלה ג5). כפי שחישבנו בשאלה ג5, שיפוע הצלע AB הוא $4/3$,
 ושיפוע הצלע AC הוא 3 .

נחשב את שיפוע הצלע BC : שיפוע זה הוא $\frac{4-3}{3-1} = \frac{1}{2}$
 נסמן ב- α את הזווית הקטנה שבין הישרים AB, AC .

לפי הנוסחה עבור זווית בין שני ישרים:

$$\tan \alpha = \frac{3 - \frac{4}{3}}{1 + 3 \cdot \frac{4}{3}} = \frac{1}{3}$$

ומכיוון ש- $0^\circ < \alpha < 90^\circ$: $\alpha = \arctan \frac{1}{3} \approx 18.43^\circ$

הזווית $\angle BAC$ היא אחת מארבע הזוויות שבין הישרים AB, AC , לכן
 $\angle BAC = \alpha \approx 18.43^\circ$ או $\angle BAC = 180^\circ - \alpha \approx 161.57^\circ$

באופן דומה, נסמן ב- β את הזווית הקטנה שבין הישרים AB, BC , ונקבל

$$\tan \beta = \left| \frac{\frac{4}{3} - \frac{1}{2}}{1 + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2}} \right| = \frac{1}{2} \Rightarrow \beta = \arctan \frac{1}{2} \approx 26.57^\circ$$

$$\Rightarrow \angle ABC = \beta \approx 26.57^\circ \text{ או } \angle ABC = 180^\circ - \beta \approx 153.43^\circ$$

כמו כן, נסמן ב- γ את הזווית הקטנה שבין הישרים AC, BC , ונקבל

$$\tan \gamma = \left| \frac{3 - \frac{1}{2}}{1 + 3 \cdot \frac{1}{2}} \right| = 1 \Rightarrow \gamma = \arctan 1 = 45^\circ$$

$$\Rightarrow \angle ACB = \gamma \approx 45^\circ \text{ או } \angle ACB = 180^\circ - \gamma = 135^\circ$$

קיבלנו שתי אפשרויות עבור כל אחת מזוויות המשולש. סכום זוויות המשולש הוא 180° , ולכל היותר זווית אחת בו יכולה להיות קהה. מאילוצים אלה נובע שיש רק אפשרות אחת, והיא:

$$\begin{aligned} \angle BAC &= \alpha \approx 18.43^\circ \\ \angle ABC &= \beta \approx 26.57^\circ \\ \angle ACB &= 180^\circ - \gamma = 135^\circ \end{aligned}$$

א. נכתוב הצגה פרמטרית של הישר העובר דרך הנקודות $(1,2)$ ו- $(2,5)$:

$$P_t = ((1-t) \cdot 1 + t \cdot 2, (1-t) \cdot 2 + t \cdot 5) = (1+t, 2+3t)$$

$$\{(1+t, 2+3t) \mid t \in \mathbb{R}\} \quad \text{הישר הוא}$$

ב. נתון הישר: $2x + y = 4$.

כדי למצוא הצגה פרמטרית, נבחר שתי נקודות על הישר. נבחר ערכי x ונמצא את ערכי y המתאימים להם:

$$x = 0 \Rightarrow y = 4$$

$$x = 1 \Rightarrow y = 2$$

הנקודות $(0, 4)$, $(1, 2)$ נמצאות על הישר. בהתאם לכך נמצאות על הישר גם הנקודות

$$P_t = ((1-t) \cdot 0 + 1 \cdot t, (1-t) \cdot 4 + 2t) = (t, 4-2t)$$

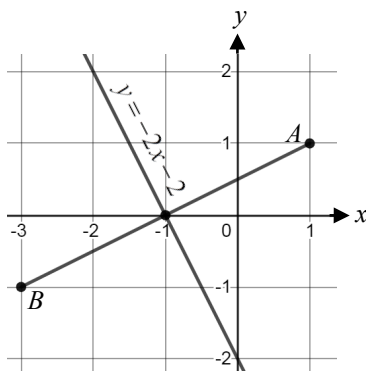
$$\{(t, 4-2t) \mid t \in \mathbb{R}\} \quad \text{הישר הוא}$$

פתרון נוסף: נציג את משוואת הישר כך –

לכן נקודות הישר הן

$$\{(x, y) \mid y = 4 - 2x\} = \{(x, 4 - 2x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \{(t, 4 - 2t) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

השאלה בעמוד 57



השאלה בעמוד 57

תשובה 8

נתונות הנקודות:

$$A = (1, 1), B = (-3, -1)$$

א. אמצע הקטע AB הוא

$$\left(\frac{1 + (-3)}{2}, \frac{1 + (-1)}{2} \right) = (-1, 0)$$

ב. שיפוע הישר AB הוא

$$\frac{1 - (-1)}{1 - (-3)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

לכן שיפוע האנך ל- AB הוא

$$-1 : \frac{1}{2} = -2$$

האנך האמצעי לקטע AB עובר דרך אמצע הקטע, $(-1, 0)$ ושיפועו הוא -2 .

משוואת האנך האמצעי היא:

$$y = -2(x - (-1)) + 0$$

כלומר

$$y = -2x - 2$$

תשובה 9

נתון משולש שקודקודיו הם:

$$A = (-3, -5), B = (3, -1), C = (-1, 1)$$

א. נסמן את תיכוני המשולש ב- AA' , BB' , CC' .

$$A' = \left(\frac{3 + (-1)}{2}, \frac{(-1) + 1}{2} \right) = (1, 0) \quad \text{הנקודה } A' \text{ היא אמצע הצלע } BC$$

הנקודה B' היא אמצע הצלע AC :

$$B' = \left(\frac{(-3) + (-1)}{2}, \frac{(-5) + 1}{2} \right) = (-2, -2)$$

$$\frac{0 - (-5)}{1 - (-3)} = \frac{5}{4} \quad \text{שיפוע התיכון } AA' \text{ הוא}$$

משוואת התיכון AA' (לפי הנקודה $(1, 0)$ והשיפוע $5/4$) היא

$$y = \frac{5}{4}(x - 1) + 0$$

כלומר:

$$y = 1.25x - 1.25$$

$$\frac{(-1) - (-2)}{3 - (-2)} = \frac{1}{5} \quad \text{שיפוע התיכון } BB' \text{ הוא}$$

משוואת התיכון BB' (לפי הנקודה $(-2, -2)$ והשיפוע $1/5$) היא

$$y = \frac{1}{5}(x + 2) - 2$$

$$y = 0.2x - 1.6 \quad \text{כלומר:}$$

כדי למצוא את נקודת מפגש התיכונים AA' ו- BB' נפתור את מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} y = 1.25x - 1.25 \\ y = 0.2x - 1.6 \end{cases} \Rightarrow 1.25x - 1.25 = 0.2x - 1.6 \Rightarrow 1.05x = -0.35$$

$$\Rightarrow x = \frac{-0.35}{1.05} = -\frac{1}{3} \Rightarrow y = 0.2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) - 1.6 = \frac{-0.2 - 4.8}{3} = -\frac{5}{3}$$

לפי משפט 8.26, כל התיכונים במשולש נפגשים בנקודה אחת. לכן $(-1/3, -5/3)$ היא נקודת המפגש של תיכוני המשולש.

הערה: ניתן להוכיח כי בכל משולש שקודקדיו הם (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) נקודת המפגש של תיכוני המשולש (הנקראת, כאמור בשיעור 8, גם **מרכז הכובד** של המשולש), היא:

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right)$$

ב. לפי משפט 8.40, מרכז המעגל החוסם את המשולש הוא נקודת מפגש האנכים

האמצעיים שלו. נחשב את משוואות האנכים האמצעיים לצלעות AC , BC :

$$\frac{1 - (-5)}{-1 - (-3)} = 3 \quad \text{שיפוע הצלע } AC \text{ הוא}$$

לכן שיפוע של אנך לצלע AC הוא $-1/3$.

כפי שמצאנו בסעיף א, אמצע הצלע AC הוא הנקודה $B' = (-2, -2)$.

משוואת האנך האמצעי לצלע AC (לפי הנקודה B' והשיפוע $-1/3$) היא

$$y = \frac{-1}{3}(x + 2) - 2$$

$$y = -\frac{8}{3} - \frac{x}{3} \quad \text{כלומר}$$

$$\frac{1 - (-1)}{(-1) - 3} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2} \quad \text{שיפוע הצלע } BC \text{ הוא}$$

לכן שיפוע של אנך לצלע BC הוא 2.

כפי שמצאנו בסעיף א, אמצע הצלע BC הוא הנקודה $A' = (1, 0)$.

משוואת האנך האמצעי לצלע BC (לפי הנקודה A' והשיפוע 2) היא

$$y = 2(x - 1)$$

כדי למצוא את נקודת מפגש האנכים האמצעיים נפתור את מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} y = -\frac{8}{3} - \frac{x}{3} \\ y = 2(x-1) \end{cases} \Rightarrow -\frac{8}{3} - \frac{x}{3} = 2x - 2 \Rightarrow 2 - \frac{8}{3} = \left(2 + \frac{1}{3}\right)x$$

$$\Rightarrow -\frac{2}{3}x = \frac{7}{3} \Rightarrow x = -\frac{2}{7} \Rightarrow y = 2\left(-\frac{2}{7} - 1\right) = -\frac{18}{7} = -2\frac{4}{7}$$

לפיכך, מרכז המעגל החוסם את המשולש $\triangle ABC$ הוא $(-2/7, -18/7)$.

השאלה בעמוד 57

תשובה 10

נתון משולש שקודקדיו הם: $A = (1,1)$, $B = (5,0)$, $C = (2,7)$

A' היא אמצע הצלע BC , B' היא אמצע הצלע AC .

נמצא את שיעורי הנקודות A' , B' , לפי הנוסחה לנקודת אמצע של קטע:

$$A' = \left(\frac{5+2}{2}, \frac{0+7}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right)$$

$$B' = \left(\frac{1+2}{2}, \frac{1+7}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, 4\right)$$

$$\frac{\frac{7}{2} - 4}{\frac{7}{2} - \frac{3}{2}} = -\frac{1}{4}$$

שיפוע הקטע $A'B'$ הוא

$$\frac{1-0}{1-5} = -\frac{1}{4}$$

שיפוע הקטע AB הוא

לקטעים AB , $A'B'$ יש שיפוע זהה. הקטעים אינם מונחים על אותו ישר כי למשל B' , אמצע הצלע AC , אינה מונחת על הישר AB (אחרת היה נובע שכל קודקודי המשולש מונחים על ישר אחד). לכן, לפי טענה 10.4, $A'B' \parallel AB$.

הערה: קטע המחבר שני אמצעי צלעות של משולש נקרא **קטע אמצעים במשולש**. בהחלפת הנקודות A, B, C שבשאלה בנקודות כלליות (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) , ניתן להוכיח טענה כללית: בכל משולש, כל קטע אמצעים מקביל לצלע שמולו.

תשובה 11

א. המרחק בין הנקודות $(2,5)$ ו- $(3,-1)$ הוא

$$\sqrt{(3-2)^2 + ((-1)-5)^2} = \sqrt{37}$$

ב. המרחק בין הנקודה $(1,-2)$ והראשית $(0,0)$ הוא:

$$\sqrt{(1-0)^2 + ((-2)-0)^2} = \sqrt{5}$$

השאלה בעמוד 58

השאלה בעמוד 59

תשובה 12

נתון משולש שקודקודיו הם: $A = (0,0)$, $B = (6,0)$, $C = (2,5)$

א. נחשב את אורכי צלעות המשולש, לפי נוסחת המרחק:

$$\overline{AB} = \sqrt{(6-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{36} = 6$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(2-0)^2 + (5-0)^2} = \sqrt{29} \approx 5.39$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(6-2)^2 + (0-5)^2} = \sqrt{41} \approx 6.40$$

ב. נחשב את שיעורי נקודות האמצע של צלעות המשולש:

$$A' := \left(\frac{6+2}{2}, \frac{0+5}{2} \right) = (4, 2.5) \quad \text{נקודת האמצע של הצלע } BC$$

$$B' := \left(\frac{0+2}{2}, \frac{0+5}{2} \right) = (1, 2.5) \quad \text{נקודת האמצע של הצלע } AC$$

$$C' := \left(\frac{0+6}{2}, \frac{0+0}{2} \right) = (3, 0) \quad \text{נקודת האמצע של הצלע } AB$$

אורכי תיכוני המשולש, לפי נוסחת המרחק, הם:

אורך התיכון לצלע BC –

$$\overline{AA'} = \sqrt{4^2 + 2.5^2} = \sqrt{16 + \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{89}{4}} = \frac{\sqrt{89}}{2} \approx 4.72$$

אורך התיכון לצלע AC –

$$\overline{BB'} = \sqrt{5^2 + 2.5^2} = \sqrt{25 \left(1 + \frac{1}{4} \right)} = \sqrt{25 \cdot \frac{5}{4}} = \frac{5}{2} \sqrt{5} \approx 5.59$$

אורך התיכון לצלע AB –

$$\overline{CC'} = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{26} \approx 5.10$$

השאלה בעמוד 59

תשובה 13

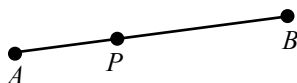
נתונות הנקודות $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$

והנקודה $P_t = ((1-t)x_1 + tx_2, (1-t)y_1 + ty_2)$

א. לפי נוסחת המרחק:

$$\begin{aligned} \overline{AP_t} &= \sqrt{((1-t)x_1 + tx_2 - x_1)^2 + ((1-t)y_1 + ty_2 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{(tx_2 - tx_1)^2 + (ty_2 - ty_1)^2} = \sqrt{t^2((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2)} \\ &= \sqrt{t^2} \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = |t| \overline{AB} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{BP_t} &= \sqrt{((1-t)x_1 + tx_2 - x_2)^2 + ((1-t)y_1 + ty_2 - y_2)^2} \\ &= \sqrt{((1-t)x_1 + (t-1)x_2)^2 + ((1-t)y_1 + (t-1)y_2)^2} \\ &= \sqrt{((1-t)(x_1 - x_2))^2 + ((1-t)(y_1 - y_2))^2} \\ &= \sqrt{(1-t)^2((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2)} \\ &= \sqrt{(1-t)^2} \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = |1-t| \overline{AB}\end{aligned}$$



ב. ניתן לאפיין את נקודות הקטע AB כנקודות P על הישר AB , שמקיימות $\overline{PA} \leq \overline{AB}$ וגם $\overline{PB} \leq \overline{AB}$.

לפי משפט 10.6, הישר AB הינו אוסף הנקודות מהצורה P_t , עבור t ממשי כלשהו. לפי הנוסחאות שהוכחנו בסעיף הקודם:

$$\overline{BP_t} = |1-t| \overline{AB} = (1-t) \overline{AB} > \overline{AB} \quad \text{לכל } t < 0$$

ולכן P_t אינה שייכת לקטע AB .

$$\overline{AP_t} = |t| \overline{AB} = t \overline{AB} \leq \overline{AB} \quad \text{לכל } 0 \leq t \leq 1$$

$$\overline{BP_t} = |1-t| \overline{AB} = (1-t) \overline{AB} \leq \overline{AB}$$

וגם
ולכן P_t שייכת לקטע AB .

$$\overline{AP_t} = |t| \overline{AB} = t \overline{AB} > \overline{AB} \quad \text{לכל } t > 1$$

ולכן P_t אינה שייכת לקטע AB .

לפיכך הקטע AB הוא קבוצת הנקודות $\{P_t \mid 0 \leq t \leq 1\}$.
בכך, הוכחנו את חלק א של טענה 10.7.
חלק ב של טענה 10.7 הוכח בסעיף הקודם של שאלה זו.

$$\overline{AP_{1/2}} = \frac{1}{2} \overline{AB} \quad \text{לבסוף, מהנוסחאות שהוכחו בסעיף א נובע:}$$

$$\overline{BP_{1/2}} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \overline{AB} = \frac{1}{2} \overline{AB}$$

הנקודה $P_{1/2}$ שייכת לקטע AB ונמצאת במרחקים שווים משני קצותיו, לכן היא אמצע הקטע. בכך סיימנו את הוכחת טענה 10.7.

השאלה בעמוד 60

תשובה 14

- א. משוואת המעגל בעל מרכז $(2, -2)$ ורדיוס 5: $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 25$
ב. משוואת המעגל בעל מרכז $(0, 1)$ ורדיוס 3: $x^2 + (y-1)^2 = 9$

ג. נתבונן במשוואה $x^2 + 4x + y^2 + y = 1$
 נוסיף 4.25 לשני האגפים: $\Leftrightarrow (x^2 + 4x + 4) + \left(y^2 + y + \frac{1}{4}\right) = 5.25$
 $\Leftrightarrow (x + 2)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 5.25$

לכן המשוואה מגדירה מעגל שמרכזו בנקודה $(-2, -1/2)$ ורדיוסו הוא

$$\sqrt{5.25} = \frac{\sqrt{21}}{2}$$

ד. נתבונן במשוואה $x^2 + y^2 = 2x + 3y$
 נעביר אגפים: $\Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 - 3y = 0$
 נוסיף 3.25 לשני האגפים: $\Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 3y + (1.5)^2) = 3.25$
 $\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 1.5)^2 = 3.25$

לכן המשוואה מגדירה מעגל שמרכזו בנקודה $(1, 1.5)$ ורדיוסו הוא

$$\sqrt{3.25} = \sqrt{\frac{13}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

השאלה בעמוד 61

תשובה 15

נתון מעגל בעל מרכז בנקודה $(3, 1)$ ורדיוס $\sqrt{2}$. משוואת המעגל היא

$$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 2$$

נמצא את חיתוכו עם כל אחד מהישרים המבוקשים:

א. חיתוך המעגל עם הישר $x + y = 4$:

נציב $y = 4 - x$ במשוואת המעגל ונקבל $(x - 3)^2 + (3 - x)^2 = 2$

$$\Leftrightarrow 2(x - 3)^2 = 2 \Leftrightarrow (x - 3)^2 = 1 \Leftrightarrow x - 3 = \pm 1 \Leftrightarrow x = 3 \pm 1$$

פתרונות משוואה זו הם $x = 2$ ו- $x = 4$. לכל פתרון מתאים ערך y :

$$x = 2 \Rightarrow y = 4 - x = 2$$

$$x = 4 \Rightarrow y = 4 - x = 0$$

נקודות החיתוך הן $(2, 2)$ ו- $(4, 0)$.

ב. חיתוך המעגל עם הישר $x + y = 2$:

נציב $y = 2 - x$ במשוואת המעגל ונקבל $(x - 3)^2 + (1 - x)^2 = 2$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 8x + 10 = 2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

הפתרון היחיד הוא $x = 2$, וממנו נובע: $y = 2 - 2 = 0$.

נקודת החיתוך היחידה של הישר והמעגל היא $(2, 0)$. הישר $x + y = 2$ הוא אפוא משיק למעגל הנתון.

ג. חיתוך המעגל עם הישר $x + y = 0$:

נציב $y = -x$ במשוואת המעגל ונקבל

$$(x-3)^2 + (-x-1)^2 = 2$$

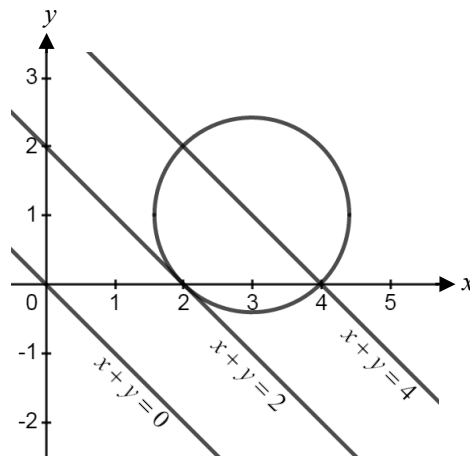
כלומר,

$$\Leftrightarrow (x-3)^2 + (x+1)^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 10 = 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 4 = 0$$

קיבלנו משוואה ריבועית שהדיסקרימיננטה שלה היא $2^2 - 4 \cdot 4 = -12$.
הדיסקרימיננטה שלילית ולכן אין פתרונות. לכן, למעגל ולישר אין נקודות חיתוך.

באיור הבא מוצגים המעגל ושלושת הישרים:



השאלה בעמוד 62

תשובה 16

נתונים המעגלים:

(1) $(x+3)^2 + y^2 = 17$

(2) $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$

כדי למצוא את נקודות החיתוך ביניהם, עלינו לפתור את מערכת המשוואות המורכבת מהמשוואות (1) ו-(2).

נחסר בין המשוואות:

$$(x+3)^2 - (x-1)^2 + y^2 - (y+1)^2 = 13$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 - (x^2 - 2x + 1) + y^2 - (y^2 + 2y + 1) = 13$$

$$\Leftrightarrow 8x + 8 - 2y - 1 = 13 \Leftrightarrow 8x - 2y = 6 \Leftrightarrow 4x - y = 3$$

נציב $y = 4x - 3$ במשוואה (2):

$$(x-1)^2 + (4x-2)^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow 17x^2 - 18x + 1 = 0$$

לאחר פישוט, נקבל:

נפתור את המשוואה הריבועית:

$$\Leftrightarrow x = \frac{18 \pm \sqrt{256}}{34} = \frac{18 \pm 16}{34}$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ או } x = \frac{1}{17}$$

$$x = 1 \Rightarrow y = 4x - 3 = 1$$

לכל פתרון מתאים ערך y :

$$x = \frac{1}{17} \Rightarrow y = 4x - 3 = \frac{4}{17} - 3 = -\frac{47}{17}$$

נקודות החיתוך של המעגלים הן $(1, 1)$ ו- $(1/17, -47/17)$.

השאלה בעמוד 63

תשובה 17

נתון המעגל:

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 2$$

מרכז המעגל הוא בנקודה $O = (1, 2)$.א. נתבונן בנקודה $A = (2, 1)$. נוודא שנקודה זו נמצאת על המעגל:

$$(2-1)^2 + (1-2)^2 = 2$$

המשיק למעגל בנקודה A ניצב לישר OA . שיפוע הישר OA הוא

$$\frac{1-2}{2-1} = -1$$

שיפוע המשיק הוא, לכן, $(-1) / (-1) = 1$.משוואת המשיק היא (לפי הנקודה A והשיפוע 1):

$$y = x - 1$$

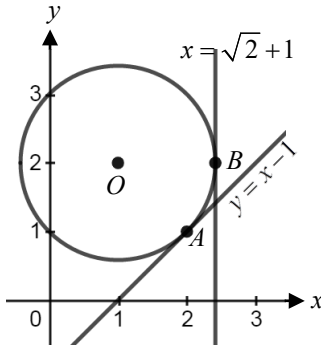
כלומר,

ב. נתבונן בנקודה $B = (\sqrt{2} + 1, 2)$. נוודא שנקודה זו נמצאת על המעגל:

$$(\sqrt{2} + 1 - 1)^2 + (2 - 2)^2 = 2 + 0 = 2$$

המשיק למעגל בנקודה B ניצב לישר OB . שיפוע הישר OB הוא

$$\frac{2-2}{\sqrt{2}} = 0$$

הישר OB הוא אופקי, ולכן המשיק למעגל בנקודה B הוא ישר אנכי. שיעור x שלהנקודה B הוא $\sqrt{2} + 1$, לכן המשיק בנקודה זו הוא הישר $x = \sqrt{2} + 1$.

השאלה בעמוד 65

תשובה 18

א. נתון מעגל היחידה $x^2 + y^2 = 1$, והנקודה $A = (2, 0)$. הנקודה A לא נמצאת עלהמעגל, כי $2^2 + 0^2 = 4 \neq 1$.הישר האנכי דרך A , $x = 2$, אינו נחתך עם המעגל, כי למשוואה $2^2 + y^2 = 1$ אין פתרון. לכן ישר זה אינו משיק.נחפש משיק למעגל שהוא ישר לא אנכי העובר דרך A . יהי a השיפוע של ישר זה.

$$y = a(x - 2)$$

משוואת הישר היא:

$$x^2 + (a(x - 2))^2 = 1$$

נציב במשוואת המעגל:

$$x^2 + a^2(x^2 - 4x + 4) = 1$$

$$(a^2 + 1)x^2 - 4a^2x + (4a^2 - 1) = 0$$

הדיסקרימיננטה של משוואה זו היא:

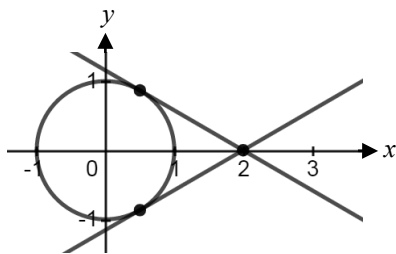
$$\begin{aligned} D &= (4a^2)^2 - 4(a^2 + 1)(4a^2 - 1) = 16a^4 - 4(4a^4 + 3a^2 - 1) \\ &= 4 - 12a^2 \end{aligned}$$

הדיסקרימיננטה מתאפסת עבור $a = \pm\sqrt{1/3} = \pm\sqrt{3}/3$. עבור ערכים אלה, יש נקודת

חיתוך יחידה בין הישר והמעגל, כלומר, הישר משיק למעגל.

$$y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}(x - 2)$$

לכן משוואות הישרים המשיקים הן



נמצא את נקודת ההשקה של המשיק $y = (\sqrt{3}/3)(x-2)$:

$$x^2 + \frac{(x-2)^2}{3} = 1 \quad \text{לאחר הצבה במשוואת המעגל, נקבל}$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + (x-2)^2 = 3 \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow (2x-1)^2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\frac{1}{2} - 2 \right) = \frac{-\sqrt{3}}{2} \quad \text{מכאן נקבל את שיעור } y \text{ של נקודת ההשקה:}$$

נקודת ההשקה היא $(1/2, -\sqrt{3}/2)$.

באופן דומה, נקודת ההשקה של $y = (-\sqrt{3}/3)(x-2)$ היא $(1/2, \sqrt{3}/2)$.
המעגל, המשיקים ונקודות ההשקה מוצגים באיור משמאל.

ב. נתון המעגל: $x^2 + y^2 = 2$. אנו מחפשים משיקים המקבילים לישר $y = 3x$, כלומר, משיקים שאינם אנכיים, בעלי שיפוע 3.

משוואתו של משיק כזה היא $y = 3x + b$. כדי למצוא את b , נציב $y = 3x + b$ במשוואת המעגל:

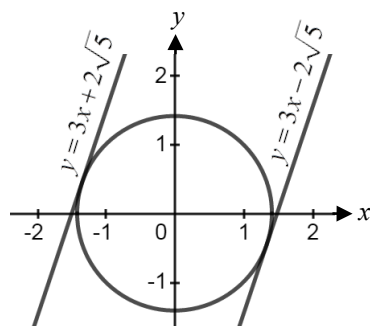
$$x^2 + (3x + b)^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow 10x^2 + 6bx + (b^2 - 2) = 0$$

$$D = 36b^2 - 40(b^2 - 2) = 80 - 4b^2 \quad \text{הדיסקרימיננטה היא}$$

הדיסקרימיננטה מתאפסת כאשר $b = \pm\sqrt{20} = \pm 2\sqrt{5}$. לפיכך שני המשיקים המבוקשים הם $y = 3x \pm 2\sqrt{5}$.

המעגל והמשיקים מוצגים באיור משמאל.



השאלה בעמוד 68

תשובה 19

נתונה המשוואה:

$$x^2 + 2y^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$$

א. נחלק את המשוואה ב' 4:

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{2})^2} = 1$$

המשוואה מגדירה אליפסה קנונית עם $a = 2, b = \sqrt{2}$.

ב. אורך האליפסה הוא $2a = 4$; רוחב האליפסה הוא $2b = 2\sqrt{2}$.

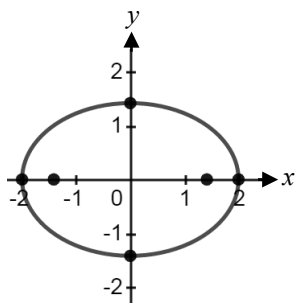
ג. קודקודי האליפסה הם הנקודות $(\pm a, 0), (0, \pm b)$, כלומר:

$$(2, 0), (-2, 0), (0, \sqrt{2}), (0, -\sqrt{2})$$

ד. מוקדי האליפסה הם הנקודות $(\pm c, 0)$, כש- $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{4 - 2} = \sqrt{2}$.

לכן המוקדים הם $(\sqrt{2}, 0)$ ו- $(-\sqrt{2}, 0)$.

באיור משמאל מוצגת האליפסה עם הקודקודים והמוקדים.



השאלה בעמוד 69

תשובה 20

נתונה המשוואה:

$$3(x-1)^2 + 2(y-2)^2 = 12$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{6} = 1 \quad \text{א. נחלק את המשוואה ב-12:}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{2^2} + \frac{(y-2)^2}{(\sqrt{6})^2} = 1$$

המשוואה מגדירה אליפסה מקבילה לצירים עם $a = 2, b = \sqrt{6}$.מרכז האליפסה הוא $(1, 2)$. אורך האליפסה הוא $2b = 2\sqrt{6}$ ורוחבה הוא $2a = 4$. $\triangleleft$ כי $a < b$.

ב. מוקדי האליפסה הם $(1, 2 \pm \sqrt{c})$, כש- $\sqrt{c} = \sqrt{\sqrt{6}^2 - 2^2} = \sqrt{2}$. לכן $c = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{\sqrt{6}^2 - 2^2} = \sqrt{2}$.
המוקדים הם $(1, 2 + \sqrt{2})$ ו- $(1, 2 - \sqrt{2})$.

ג. נמצא את נקודות החיתוך בין האליפסה לבין הישר $y = 2x - 1$:

$$3(x-1)^2 + 2(2x-3)^2 = 12 \quad \text{נציב } y = 2x - 1 \text{ במשוואת האליפסה -}$$

$$\Leftrightarrow 11x^2 - 30x + 9 = 0 \quad \text{לאחר פישוט נקבל:}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{30 \pm \sqrt{504}}{22} = \frac{15 \pm \sqrt{126}}{11}$$

לכל ערך אפשרי של x מתאים ערך y :

$$y = 2x - 1 = 2 \cdot \frac{15 \pm \sqrt{126}}{11} - 1 = \frac{30 \pm 2\sqrt{126} - 11}{11} = \frac{19 \pm 2\sqrt{126}}{11}$$

לכן נקודות החיתוך הן

$$\left(\frac{15 + \sqrt{126}}{11}, \frac{19 + 2\sqrt{126}}{11} \right), \left(\frac{15 - \sqrt{126}}{11}, \frac{19 - 2\sqrt{126}}{11} \right)$$

השאלה בעמוד 75

תשובה 21

א. נחפש ישר בעל שיפוע a העובר דרך הנקודה $(2, -1)$ ומשיק לפרבולה $y = x^2$.

$$y = a(x-2) - 1 = ax - (2a+1) \quad \text{משוואת הישר היא}$$

$$x^2 = ax - (2a+1) \quad \text{החיתוך בין הישר לפרבולה נקבע על פי המשוואה}$$

$$x^2 - ax + (2a+1) = 0 \quad \text{השקולה ל:}$$

$$a^2 - 4(2a+1) = a^2 - 8a - 4 \quad \text{הדיסקרימיננטה של משוואה זו היא}$$

הדיסקרימיננטה מתאפסת כאשר:

$$a = \frac{8 \pm \sqrt{8^2 + 16}}{2} = 4 \pm \sqrt{20} = 4 \pm 2\sqrt{5}$$

עבור כל אחד מערכים אלה מתקבל משיק לפרבולה. המשיקים הם:

$$y = (4 + 2\sqrt{5})x - 9 - 4\sqrt{5} \quad \text{ו-} \quad y = (4 - 2\sqrt{5})x - 9 + 4\sqrt{5}$$

ב. נחפש ישר בעל שיפוע a העובר דרך הנקודה $(-5, 0)$ ומשיק לאליפסה $x^2 + 2y^2 = 1$.

$$y = a(x + 5) + 0 = ax + 5a \quad \text{משוואת הישר היא}$$

$$x^2 + 2(a(x + 5))^2 = 1 \quad \text{החיתוך בין הישר לאליפסה נקבע על פי המשוואה}$$

$$x^2 + 2a^2(x^2 + 10x + 25) = 1 \quad \text{השקולה ל:}$$

$$x^2 + 2a^2x^2 + 20a^2x + 50a^2 - 1 = 0$$

$$(2a^2 + 1)x^2 + 20a^2x + (50a^2 - 1) = 0$$

הדיסקרימיננטה של משוואה זו היא

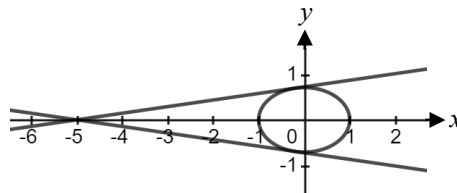
$$\begin{aligned} 400a^4 - 4(2a^2 + 1)(50a^2 - 1) &= 400a^4 - 4(100a^4 + 48a^2 - 1) \\ &= -4(48a^2 - 1) \end{aligned}$$

$$48a^2 = 1 \Leftrightarrow a = \pm \frac{1}{\sqrt{48}} = \pm \frac{1}{4\sqrt{3}} \quad \text{הדיסקרימיננטה מתאפסת כאשר:}$$

עבור כל אחד מערכים אלה מתקבל משיק לפרבולה. המשיקים הם:

$$y = \frac{x+5}{4\sqrt{3}}, \quad y = -\frac{x+5}{4\sqrt{3}}$$

האליפסה והמשיקים מוצגים באיור:



השאלה בעמוד 76

תשובה 22

נמצא את נקודות החיתוך של הישר והמעגל. לצורך כך נפתור את מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} x^2 + (y - 1)^2 = 4 \\ 2y + x = 1 \end{cases}$$

$$(1 - 2y)^2 + (y - 1)^2 = 4 \quad \text{נציב } x = 1 - 2y \text{ במשוואה הראשונה:}$$

$$\Leftrightarrow 4y^2 - 4y + 1 + y^2 - 2y + 1 = 4$$

$$\Leftrightarrow 5y^2 - 6y - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{6 \pm \sqrt{76}}{10} = \frac{3 \pm \sqrt{19}}{5}$$

בהתאם לערכי y האפשריים, נקבעים ערכי x :

$$y = \frac{3 + \sqrt{19}}{5} \Rightarrow x = 1 - 2y = \frac{5 - 6 - 2\sqrt{19}}{5} = \frac{-1 - 2\sqrt{19}}{5}$$

$$y = \frac{3 - \sqrt{19}}{5} \Rightarrow x = 1 - 2 \cdot \frac{3 - \sqrt{19}}{5} = \frac{5 - 6 + 2\sqrt{19}}{5} = \frac{-1 + 2\sqrt{19}}{5}$$

נקודות החיתוך של הישר והמעגל הן:

$$A := \left(\frac{-1 - 2\sqrt{19}}{5}, \frac{3 + \sqrt{19}}{5} \right), \quad B := \left(\frac{-1 + 2\sqrt{19}}{5}, \frac{3 - \sqrt{19}}{5} \right)$$

נחשב את המרחק בין הנקודות, לפי נוסחת המרחק:

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \sqrt{\left(\frac{-1-2\sqrt{19}}{5} - \frac{-1+2\sqrt{19}}{5}\right)^2 + \left(\frac{3+\sqrt{19}}{5} - \frac{3-\sqrt{19}}{5}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{4\sqrt{19}}{5}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{19}}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{4^2 \cdot 19}{5^2} + \frac{2^2 \cdot 19}{5^2}} = \sqrt{\frac{20 \cdot 19}{25}} \\ &= 2\sqrt{\frac{19}{5}}\end{aligned}$$

השאלה בעמוד 76

תשובה 23

נתונים הנקודה $P = (0, 3)$ והישר $\ell = \{(1-t, 3+2t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

נבחר שתי נקודות על הישר:

עבור $t = 0$ מתקבלת הנקודה $(1, 3)$.

עבור $t = 1$ מתקבלת הנקודה $(0, 5)$.

שיפוע הישר ℓ הוא, לפיכך, $\frac{5-3}{0-1} = -2$

משוואת הישר ℓ היא (לפי הנקודה $(1, 3)$ והשיפוע -2): $y = -2(x-1) + 3$

כלומר $y = 5 - 2x$

משוואת האנך לישר ℓ העובר דרך P היא (לפי הנקודה $P = (0, 3)$ והשיפוע $1/2$):

$$y = \frac{1}{2}x + 3$$

כדי למצוא את היטל הנקודה P על הישר ℓ , נמצא את חיתוך ℓ והאנך, כלומר נפתור את

מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} y = 5 - 2x \\ y = x/2 + 3 \end{cases} \Rightarrow 5 - 2x = \frac{x}{2} + 3 \Rightarrow \frac{5}{2}x = 2 \Rightarrow x = \frac{4}{5} \Rightarrow y = \frac{17}{5}$$

ההיטל הוא הנקודה $Q := (4/5, 17/5) = (0.8, 3.4)$

המרחק בין P לישר ℓ שווה למרחק בין P להיטלה על הישר ℓ , כלומר ל- $\overline{PQ}$. לפי נוסחת המרחק:

$$\overline{PQ} = \sqrt{(0-0.8)^2 + (3-3.4)^2} = \sqrt{0.64+0.16} = \sqrt{0.8} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

השאלה בעמוד 76

תשובה 24

נתונים הישרים $2x + 3y = 1$ ו- $x - 2y = 5$. נציג כל אחד מהם בצורה שקולה:

$$2x + 3y = 1 \Leftrightarrow y = \frac{1-2x}{3} \Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$$

$$x - 2y = 5 \Leftrightarrow y = \frac{x-5}{2} \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$$

שיפועי הישרים הם $2/3$ ו- $1/2$. לפי נוסחת הזווית בין שני ישרים, הזווית הקטנה α שבין הישרים מקיימת

$$\tan \alpha = \left| \frac{-\frac{2}{3} - \frac{1}{2}}{1 + \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{1}{2}} \right| = \left| \left(-\frac{7}{6}\right) : \frac{2}{3} \right| = \frac{7}{4}$$

$$\alpha = \arctan \frac{7}{4} \approx 60.26^\circ \quad \text{לכן}$$

השאלה בעמוד 76

תשובה 25

א. נסמן: $A = (1, 2)$, $B = (-2, -1)$, $C = (-1, 1)$

נסמן את תיכוני המשולש $\triangle ABC$ ב- AA' , BB' , CC' .

הנקודה A' היא אמצע הצלע BC :

$$A' = \left(\frac{(-2) + (-1)}{2}, \frac{(-1) + 1}{2} \right) = (-1.5, 0)$$

$$B' = \left(\frac{1 + (-1)}{2}, \frac{2 + 1}{2} \right) = (0, 1.5) \quad \text{הנקודה } B' \text{ היא אמצע הצלע } AC$$

הנקודה C' היא אמצע הצלע AB :

$$C' = \left(\frac{1 + (-2)}{2}, \frac{2 + (-1)}{2} \right) = (-0.5, 0.5)$$

$$\frac{2 - (-1)}{1 - (-2)} = \frac{3}{3} = 1 \quad \text{שיפוע הצלע } AB \text{ הוא}$$

שיפוע האנך האמצעי לצלע AB הוא, לפיכך, -1 .

משוואת האנך האמצעי לצלע AB (לפי הנקודה C' והשיפוע -1) היא

$$y = (-1)(x + 0.5) + 0.5 = -x$$

$$\frac{2 - 1}{1 - (-1)} = \frac{1}{2} \quad \text{שיפוע הצלע } AC \text{ הוא}$$

שיפוע האנך האמצעי לצלע AC הוא, לפיכך, -2 .

משוואת האנך האמצעי לצלע AC (לפי הנקודה B' והשיפוע -2) היא

$$y = -2x + 1.5$$

נמצא את נקודת מפגש האנכים האמצעיים ל- AB ול- AC :

$$\begin{cases} y = -x \\ y = -2x + 1.5 \end{cases} \Rightarrow -x = -2x + 1.5 \Rightarrow x = 1.5 \Rightarrow y = -1.5$$

$$O = (1.5, -1.5) \quad \text{נקודת המפגש היא}$$

נקודה זו היא מרכז המעגל החוסם את המשולש, לפי משפט 8.40.

רדיוס המעגל החוסם הוא

$$r = \overline{OA} = \sqrt{(1 - 1.5)^2 + (2 - (-1.5))^2} = \sqrt{0.5^2 + 3.5^2} = \sqrt{\frac{50}{4}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$(x - 1.5)^2 + (y + 1.5)^2 = \frac{50}{4} \quad \text{משוואת המעגל החוסם היא}$$

$$(2x - 3)^2 + (2y + 3)^2 = 50 \quad \text{כלומר:}$$

ב. ההצגה הפרמטרית של התיכון AA' היא

$$\{(1-t) - 1.5t, 2(1-t) + 0 \mid t \in \mathbb{R}\} = \{(1 - 2.5t, 2 - 2t) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

ההצגה הפרמטרית של התיכון BB' היא

$$\{-2(1-t) + 0 \cdot t, -(1-t) + 1.5t \mid t \in \mathbb{R}\} = \{(2t - 2, 2.5t - 1) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

ההצגה הפרמטרית של התיכון CC' היא

$$\{-(1-t) - 0.5t, (1-t) + 0.5t \mid t \in \mathbb{R}\} = \{(0.5t - 1, 1 - 0.5t) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

השאלה בעמוד 76

תשובה 26

$$P = (1, \sqrt{2}), Q = (2, 1) \quad \text{נסמן את הנקודות:}$$

אנו מחפשים אליפסה מקבילה לצירים שמרכזו בראשית, העוברת דרך שתי נקודות אלה.

משוואת האליפסה היא מהצורה הבאה:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

עלינו למצוא את הקבועים החיוביים a ו- b .

$$\frac{1^2}{a^2} + \frac{\sqrt{2}^2}{b^2} = 1$$

היות ש- P נמצאת על האליפסה, מתקיים

$$\frac{1}{a^2} + \frac{2}{b^2} = 1$$

כלומר:

$$\frac{2^2}{a^2} + \frac{1^2}{b^2} = 1$$

היות ש- Q נמצאת על האליפסה, מתקיים

$$\frac{4}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1$$

כלומר:

$$u = \frac{1}{a^2}, v = \frac{1}{b^2}$$

נסמן

$$\begin{cases} u + 2v = 1 \\ 4u + v = 1 \end{cases}$$

מתקבלת מערכת המשוואות

$$\Rightarrow 4u + 8v = 4$$

נכפיל את המשוואה הראשונה ב-4:

$$\Rightarrow 7v = 3$$

נחסר את המשוואה השנייה:

$$\Rightarrow v = \frac{3}{7}, u = 1 - 2v = \frac{1}{7}$$

מכאן

$$\frac{x^2}{7} + \frac{3y^2}{7} = 1$$

משוואת האליפסה היא $ux^2 + vy^2 = 1$, כלומר:

$$x^2 + 3y^2 = 7$$

או

כדי למצוא את אורך ורוחב האליפסה, נמצא את a ואת b :

$$a^2 = \frac{1}{u} = 7 \Rightarrow a = \sqrt{7}$$

$$b^2 = \frac{1}{v} = \frac{7}{3} \Rightarrow b = \sqrt{\frac{7}{3}} = \frac{\sqrt{21}}{3}$$

$$.2b = \frac{2\sqrt{21}}{3} \text{ ורוחבה הוא } 2a = 2\sqrt{7} \text{ , לכן אורך האליפסה הוא } a > b$$

השאלה בעמוד 76

תשובה 27

נתון: $A = (0, 0)$, הקודקוד B מונח על הקרן החיובית של ציר ה- x , ו- $\overline{AB} = 5$, לכן:

$$B = (5, 0)$$

עוד נתון ש- $\overline{AC} = 6$, $\overline{BC} = 3$ ו- $C = (x, y)$ עבור $x \geq 0, y \geq 0$.

$$\overline{AC} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{לפי נוסחת המרחק:}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 6 \quad \text{מהנתון } \overline{AC} = 6 \text{ נקבל}$$

$$(1) \quad x^2 + y^2 = 36 \quad \text{ולכן}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(x-5)^2 + y^2} \quad \text{כמו כן,}$$

$$\sqrt{(x-5)^2 + y^2} = 3 \quad \text{מהנתון } \overline{BC} = 3 \text{ נקבל}$$

$$(2) \quad (x-5)^2 + y^2 = 9 \quad \text{ולכן}$$

נפתור את מערכת המשוואות (1) ו-(2):

$$x^2 - 10x + 25 + y^2 = 9 \quad \text{מ-(2) נובע}$$

$$25 - 10x = -27 \quad \text{נחסר את (1):}$$

$$10x = 52 \Rightarrow x = 5.2 \quad \text{מכאן}$$

$$5.2^2 + y^2 = 36 \quad \text{מ-(1) נקבל}$$

ולכן (לפי הנתון $y \geq 0$):

$$y = \sqrt{36 - 5.2^2} = \sqrt{\frac{3600 - 52^2}{100}} = \frac{\sqrt{896}}{10} = \frac{8\sqrt{14}}{10} = \frac{4\sqrt{14}}{5}$$

$$C = \left(5.2, \frac{4\sqrt{14}}{5} \right) \quad \text{לכן}$$

השאלה בעמוד 76

תשובה 28

$$(1) \quad \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \quad \text{נתונה האליפסה:}$$

לכל θ , אם $x = x_0 + a \cos \theta$, $y = y_0 + b \sin \theta$ אז

$$\begin{aligned} \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} &= \left(\frac{x-x_0}{a} \right)^2 + \left(\frac{y-y_0}{b} \right)^2 \\ &= \left(\frac{a \cos \theta}{a} \right)^2 + \left(\frac{b \sin \theta}{b} \right)^2 = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \end{aligned}$$

לכן הנקודה $(x_0 + a \cos \theta, y_0 + b \sin \theta)$ נמצאת על האליפסה.

בכיוון ההפוך, אם הנקודה (x, y) נמצאת על האליפסה (1), אז נגדיר:

$$X = \frac{x-x_0}{a}, \quad Y = \frac{y-y_0}{b}$$

$$X^2 + Y^2 = \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \quad \text{ונקבל:}$$

הנקודה (X, Y) נמצאת על מעגל היחידה, לכן יש זווית $\theta \in [0, 2\pi)$ שעבורה:

$$X = \cos \theta, \quad Y = \sin \theta$$

$$\frac{x-x_0}{a} = \cos \theta \Rightarrow x-x_0 = a \cos \theta \Rightarrow x = x_0 + a \cos \theta \quad \text{לכן:}$$

$$\frac{y-y_0}{b} = \sin \theta \Rightarrow y-y_0 = b \sin \theta \Rightarrow y = y_0 + b \sin \theta$$

$$(x, y) = (x_0 + a \cos \theta, y_0 + b \sin \theta) \quad \text{קיבלנו:}$$

הוכחנו אפוא שנקודות האליפסה הן

$$\{(x_0 + a \cos \theta, y_0 + b \sin \theta) \mid \theta \in [0, 2\pi)\}$$

השאלה בעמוד 76

תשובה 29

נתונים: $A \neq 0$ ו- $B \neq 0$.

$$(1) \quad \frac{x}{A} + \frac{y}{B} = 1 \quad \text{המשוואה}$$

$$\frac{1}{A} \cdot x + \frac{1}{B} \cdot y = 1 \quad \text{ניתנת לכתיבה בצורה:}$$

לכן משוואה זו מתארת קו ישר.

$$\frac{A}{A} + \frac{0}{B} = 1 + 0 = 1 \quad \text{הנקודות } (A, 0) \text{ ו- } (0, B) \text{ נמצאות על ישר זה:}$$

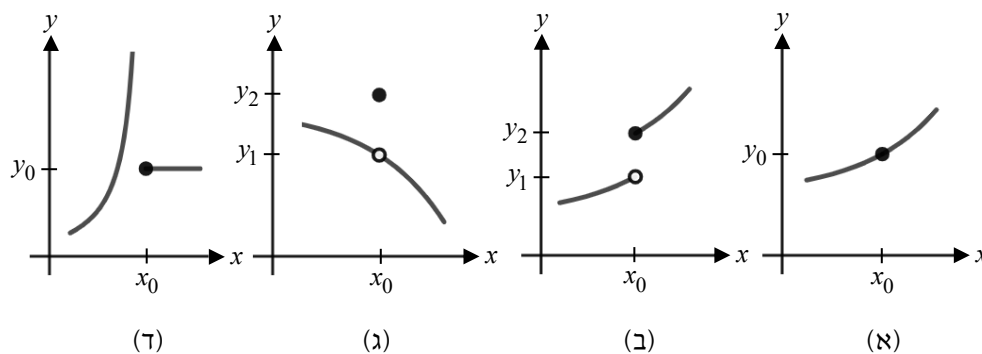
$$\frac{0}{A} + \frac{B}{B} = 0 + 1 = 1$$

מכיוון שדרך שתי נקודות עובר קו ישר יחיד, הישר (1) הוא הישר העובר דרך נקודות אלה.

פתרונות לשאלות בשיעור 11

השאלה בעמוד 88

תשובה 1



א. הגבול קיים: ככל ש- x מתקרב ל- x_0 , כך מתקרב $f(x)$ ל- $f(x_0) = y_0$. לכן

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$$

ב. עבור $x > x_0$, ככל ש- x מתקרב ל- x_0 כך מתקרב $f(x)$ ל- y_2 .

עבור $x < x_0$, ככל ש- x מתקרב ל- x_0 כך מתקרב $f(x)$ ל- y_1 .

אין ערך יחיד שאליו מתקרבים ערכי הפונקציה $f(x)$, ככל ש- x מתקרב ל- x_0 .

לכן הגבול $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ לא קיים.

ג. הגבול קיים: ככל ש- x מתקרב ל- x_0 כך מתקרב $f(x)$ ל- y_1 . לכן

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_1$$

הערה: ערך הפונקציה בנקודה x_0 עצמה, $f(x_0) = y_2$, אינו משפיע על הגבול בנקודה.

ד. עבור $x < x_0$, ככל ש- x מתקרב ל- x_0 , הערך $f(x)$ גדל לאין שיעור, ואינו מתקרב

למספר ממשי כלשהו. לכן הגבול $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ לא קיים.

השאלה בעמוד 90

תשובה 2

א. הפונקציה $f(x) = 8x - 4$ היא פונקציה לינארית בעלת שיפוע 8.

לכן $f'(x) = 8$ לכל x .

ב. הפונקציה $f(x) = x = 1 \cdot x + 0$ היא פונקציה לינארית בעלת שיפוע 1.

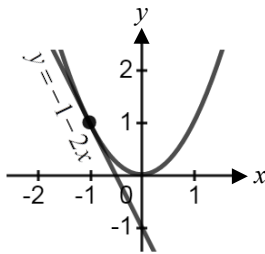
לכן $f'(x) = 1$ לכל x .

ג. הפונקציה $f(x) = -x = (-1) \cdot x + 0$ היא פונקציה לינארית בעלת שיפוע -1.

לכן $f'(x) = -1$ לכל x , כלומר: $(-x)' = -1$.

ד. הפונקציה $f(x) = 3$ היא קבועה. לפי מסקנה 11.2, $f'(x) = 0$ לכל x . כלומר: $(3)' = 0$.

השאלה בעמוד 91



תשובה 3

נתון: $f(x) = x^2$.

א. לפי טענה 11.3, לכל x מתקיים $f'(x) = 2x$. בפרט, $f'(-1) = -2$.

ב. נתבונן בנקודה $(-1, 1) = (-1, f(-1))$. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה f בנקודה זו הוא, כפי שחישבנו, -2 . משוואת המשיק (לפי הנקודה $(-1, 1)$ והשיפוע -2) היא

$$y = -2(x - (-1)) + 1$$

$$y = -1 - 2x$$

כלומר:

ג. ישר מקביל לישר $y = 3x - 2$ הנו ישר בעל שיפוע 3 (לפי טענה 10.4).

לכן נחפש נקודה x_0 , שבה $f'(x_0) = 3$. מתקבלת המשוואה: $2x_0 = 3$

לכן, $x_0 = 3/2$. ערך הפונקציה בנקודה זו הוא $f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$

משוואת המשיק (לפי הנקודה $(3/2, 9/4)$ והשיפוע 3) היא

$$y = 3\left(x - \frac{3}{2}\right) + \frac{9}{4} = 3x - \frac{9}{4}$$

נקודת ההשקה היא $(3/2, 9/4)$.

השאלה בעמוד 93

תשובה 4

א. נתון: $f(x) = 2x^2 + 3x$. הנגזרת היא

$$f'(x) = (2x^2)' + (3x)' = 2 \cdot (x^2)' + 3 = 2 \cdot 2x + 3 = 4x + 3$$

ב. נתון: $f(x) = 3x + 1 - x^2 = (3x + 1) + (-1) \cdot x^2$

$$f'(x) = (3x + 1)' + ((-1) \cdot x^2)' = 3 + (-1) \cdot 2x = 3 - 2x$$

הנגזרת היא

ג. נתונה הפונקציה $f(x) = (x + 2)(x - 3)$. נפשט:

$$f(x) = x^2 + 2x - 3x - 6 = x^2 - x - 6 = x^2 + ((-1) \cdot x + 6)$$

$$f'(x) = (x^2)' + ((-1) \cdot x + 6)' = 2x - 1$$

לכן

ד. נגדיר $f(x) = 5x^2 - x$. נגזור את הפונקציה:

$$f'(x) = 5 \cdot (2x) + (-1) = 10x - 1$$

$$f'(1) = 10 \cdot 1 - 1 = 9$$

לכן

כעת נתבונן בפרבולה $y = 5x^2 - x$. צורה זו היא גרף הפונקציה $y = f(x)$.

הנקודה $(1, 4)$ היא הנקודה $(1, f(1))$. המשיק לגרף בנקודה זו (לפי הנקודה $(1, 4)$)

$$y = 9(x - 1) + 4$$

והשיפוע 9) הוא

$$y = 9x - 5$$

כלומר:

השאלה בעמוד 95

תשובה 5

$$\begin{aligned} \text{א. } (3x^4 - x^3 + 2x + 3)' &= (3x^4)' + ((-1) \cdot x^3)' + (2x)' + (3)' \\ &= 3(x^4)' + (-1)(x^3)' + 2(x)' + 0 \\ &= 3 \cdot 4x^3 + (-1) \cdot 3x^2 + 2 \cdot 1 = 12x^3 - 3x^2 + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ב. } (x^5 + x^4 - 5x^2 + \sqrt{2} \cdot x)' &= (x^5)' + (x^4)' - 5(x^2)' + \sqrt{2}(x)' \\ &= 5x^4 + 4x^3 - 10x + \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ג. } \left(x^2 - 2x^3 + \frac{x^{20}}{4}\right)' &= (x^2)' - 2(x^3)' + \frac{1}{4}(x^{20})' \\ &= 2x - 2 \cdot 3x^2 + \frac{1}{4} \cdot 20x^{19} = 5x^{19} - 6x^2 + 2x \end{aligned}$$

ד. נתון: $p(x) = (2x + 1)(3x^2 + 4x - 2)$. נפשט:

$$\begin{aligned} p(x) &= 2x(3x^2 + 4x - 2) + 1 \cdot (3x^2 + 4x - 2) \\ &= 6x^3 + 8x^2 - 4x + 3x^2 + 4x - 2 \\ &= 6x^3 + 11x^2 - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p'(x) &= 6(x^3)' + 11(x^2)' + (-2)' \\ &= 6 \cdot 3x^2 + 11 \cdot (2x) + 0 = 18x^2 + 22x \end{aligned} \quad \text{נגזור:}$$

ה. נתון: $p(x) = (x + 1)^3$.

$$\begin{aligned} p(x) &= x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \\ p'(x) &= 3x^2 + 3 \cdot 2x + 3 + 0 = 3x^2 + 6x + 3 \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{נפשט, לפי נוסחת הבינום:} \\ \text{לכן} \end{array}$$

השאלה בעמוד 95

תשובה 6

נתונה הפונקציה $f(x) = x^3 - 8x^2 + 3$.

$$\begin{aligned} f(2) &= 8 - 8 \cdot 4 + 3 = -21 && \text{בנקודה } x = 2 \text{ ערך הפונקציה הוא} \\ f'(x) &= 3x^2 - 16x && \text{נגזור את הפונקציה:} \\ f'(2) &= 3 \cdot 2^2 - 16 \cdot 2 = -20 && \text{בפרט:} \end{aligned}$$

משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $(2, -21)$ שעליו היא:

$$\begin{aligned} y &= (-20)(x - 2) + (-21) \\ y &= 19 - 20x \end{aligned} \quad \text{כלומר:}$$

השאלה בעמוד 95

תשובה 7

$$p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \quad \text{בהינתן פולינום}$$

נגזור אותו 'מחובר-מחובר', לפי טענה 11.6:

$$p'(x) = \sum_{i=0}^n (a_i x^i)' = (a_0)' + (a_1 x)' + \dots + (a_n x^n)'$$

המספר a_0 הוא קבוע, ונגזרתו שווה לאפס. לכן

$$p'(x) = \sum_{i=1}^n (a_i x^i)' = (a_1 x)' + \dots + (a_n x^n)'$$

לפי טענה 11.5, ניתן להוציא את הקבועים a_i מחוץ לסימן הנגזרת:

$$p'(x) = \sum_{i=1}^n a_i (x^i)' = a_1 (x)' + \dots + a_n (x^n)'$$

לפי טענה 11.6 נקבל:

$$p'(x) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot i x^{i-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + n a_n x^{n-1}$$

השאלה בעמוד 96

תשובה 8

א. נתונה הפונקציה $f(x) = (2x+1)(3x-2)$

נגזור לפי כלל נגזרת המכפלה:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x+1)'(3x-2) + (2x+1)(3x-2)' \\ &= 2(3x-2) + (2x+1) \cdot 3 = 6x - 4 + 6x + 3 = 12x - 1 \end{aligned}$$

נגזור באופן ישיר, על ידי פתיחת סוגריים בביטוי הפונקציה f :

$$f(x) = 6x^2 - 4x + 3x - 2 = 6x^2 - x - 2$$

$$\Rightarrow f'(x) = 12x - 1$$

ב. נתונה הפונקציה $f(x) = (x^3 - 1)(2x^2 + 1)$

נגזור לפי כלל נגזרת המכפלה:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^3 - 1)'(2x^2 + 1) + (x^3 - 1)(2x^2 + 1)' \\ &= 3x^2(2x^2 + 1) + (x^3 - 1)(4x) = 6x^4 + 3x^2 + 4x^4 - 4x \\ &= 10x^4 + 3x^2 - 4x \end{aligned}$$

$$f(x) = 2x^5 + x^3 - 2x^2 - 1$$

נגזור באופן ישיר:

$$\Rightarrow f'(x) = 10x^4 + 3x^2 - 4x$$

ג. נתונה הפונקציה $f(x) = (x^2 + 1)^2$.

פונקציה זו היא מכפלה: $f(x) = (x^2 + 1) \cdot (x^2 + 1)$. נגזור לפי כלל נגזרת המכפלה -

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2 + 1)'(x^2 + 1) + (x^2 + 1)(x^2 + 1)' \\ &= 2x(x^2 + 1) + (x^2 + 1)2x = 4x(x^2 + 1) = 4x^3 + 4x \end{aligned}$$

נגזור באופן ישיר:

$$f(x) = (x^2)^2 + 2 \cdot x^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1, \quad \text{לפי נוסחאות הכפל המקוצר,}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 4x^3 + 4x$$

ד. נתונה הפונקציה $f(x) = x^3 \cdot x^5$.

נגזור לפי כלל נגזרת המכפלה:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^3)' \cdot x^5 + x^3 \cdot (x^5)' = 3x^2 \cdot x^5 + x^3 \cdot 5x^4 \\ &= 3x^7 + 5x^7 = 8x^7 \end{aligned}$$

$$f'(x) = (x^8)' = 8x^7 \quad \text{נגזור באופן ישיר:}$$

השאלה בעמוד 97

תשובה 9

נתון: $f(3) = 5$, $f'(3) = 0$.

א. נתבונן בפונקציה $g(x) = x^2 f(x)$

נגזור את הפונקציה לפי כלל נגזרת המכפלה: $g'(x) = 2xf(x) + x^2 f'(x)$

$$g'(3) = 2 \cdot 3 \cdot f(3) + 3^2 f'(3) = 6 \cdot 5 + 9 \cdot 0 = 30 \quad \text{נציב } x = 3:$$

ב. נתבונן בפונקציה $h(x) = x(f(x) - 1)$

נפשט: $h(x) = xf(x) - x$

נגזור: $h'(x) = (x)' f(x) + x f'(x) - (x)' = f(x) + x f'(x) - 1$

$$h'(3) = f(3) + 3 f'(3) - 1 = 5 + 3 \cdot 0 - 1 = 4 \quad \text{נציב } x = 3:$$

השאלה בעמוד 97

תשובה 10

נתון שהפונקציה f גזירה בנקודה x_0 . לפי כלל נגזרת המכפלה, הפונקציה $f^2 = f \cdot f$ גזירה בנקודה x_0 , ונגזרתה היא:

$$\begin{aligned} (f^2)'(x_0) &= (f \cdot f)'(x_0) = f'(x_0) \cdot f(x_0) + f(x_0) \cdot f'(x_0) \\ &= 2f(x_0)f'(x_0) \end{aligned}$$

הערה: נוכל לבטא את הכלל שהוכחנו כך – $(f^2)' = 2ff'$

השאלה בעמוד 97

תשובה 11

א. נגזור את הפונקציה $f(x) = x^3$, בהסתמך על נגזרת הפונקציה x^2 (טענה 11.3), נגזרת הפונקציה x (לפי טענה 11.1), וכלל נגזרת המכפלה:

$$(x^3)' = (x^2 \cdot x)' = (x^2)' \cdot x + x^2 \cdot (x)' = 2x \cdot x + x^2 \cdot 1 = 3x^2$$

ב. נוכיח באינדוקציה שלכל n טבעי $(x^n)' = nx^{n-1}$.

בהוכחה נסתמך על כלל נגזרת המכפלה ועל נגזרת הפונקציה $f(x) = x$.

עבור $n = 1$, נגזרת הפונקציה $f(x) = x$ היא $f'(x) = 1 = 1 \cdot x^0$.

כעת נניח שעבור n טבעי מסוים מתקיים $(x^n)' = nx^{n-1}$, ונוכיח ש:

$$(x^{n+1})' = (n+1)x^{(n+1)-1}$$

ואכן לפי כלל נגזרת המכפלה, $(x^{n+1})' = (x^n \cdot x)' = (x^n)' \cdot x + x^n \cdot (x)'$

$$= nx^{n-1} \cdot x + x^n \cdot 1 = nx^n + x^n$$

$$= (n+1)x^n$$

□

השאלה בעמוד 98

תשובה 12

נגזור, לפי כלל נגזרת המנה:

$$\left(\frac{1-x}{1+x}\right)' = \frac{(1-x)'(1+x) - (1-x)(1+x)'}{(1+x)^2} = \frac{(-1)(1+x) - (1-x) \cdot 1}{(1+x)^2} \quad \text{א.}$$

$$= \frac{-1-x+(x-1)}{(1+x)^2} = \frac{-2}{(1+x)^2}$$

$$\left(\frac{5}{x}\right)' = \frac{(5)' \cdot x - 5 \cdot (x)'}{x^2} = \frac{0 \cdot x - 5 \cdot 1}{x^2} = \frac{-5}{x^2} \quad \text{ב.}$$

$$\left(\frac{x}{x^2+1} + \frac{x+1}{x+2}\right)' = \left(\frac{x}{x^2+1}\right)' + \left(\frac{x+1}{x+2}\right)' \quad \text{ג.}$$

$$= \frac{x' \cdot (x^2+1) - x \cdot (x^2+1)'}{(x^2+1)^2} + \frac{1 \cdot (x+2) - (x+1) \cdot 1}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{(x^2+1) - x \cdot (2x)}{(x^2+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2}$$

$$\left(\frac{x^5}{x^6-1}\right)' = \frac{(x^5)'(x^6-1) - x^5(x^6-1)'}{(x^6-1)^2} = \frac{5x^4(x^6-1) - x^5 \cdot (6x^5)}{(x^6-1)^2} \quad \text{ד.}$$

$$= \frac{5x^{10} - 5x^4 - 6x^{10}}{(x^6-1)^2} = \frac{-x^{10} - 5x^4}{(x^6-1)^2}$$

השאלה בעמוד 98

תשובה 13

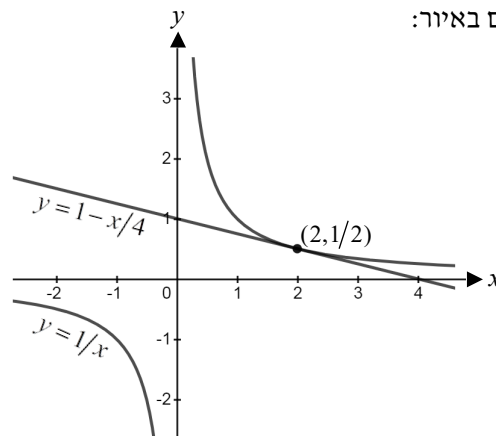
$$f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{(1)' \cdot x - 1 \cdot (x)'}{x^2} = \frac{-1}{x^2} \quad \text{נתבונן בפונקציה } f(x) = 1/x. \text{ נגזור:}$$

$$f'(2) = \frac{-1}{2^2} = -\frac{1}{4} \quad \text{בפרט:}$$

משוואת המשיק לגרף הפונקציה f בנקודה $(2, 1/2)$ היא

$$y = -\frac{1}{4}(x-2) + \frac{1}{2}$$

$$y = 1 - \frac{x}{4} \quad \text{כלומר:}$$

המשיק וההיפרבולה $y = 1/x$ מוצגים באיור:

השאלה בעמוד 98

תשובה 14

נניח ש- f פונקציה גזירה בנקודה x_0 , ו- $f(x_0) \neq 0$. נגדיר: $g(x) = 1/f(x)$.
 לפי כלל נגזרת המנה: $g'(x) = \left(\frac{1}{f(x)}\right)' = \frac{(1)' \cdot f(x) - 1 \cdot f'(x)}{f(x)^2} = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}$
 שוויון זה מתקיים בכל x שעבורו f גזירה בנקודה x , ו- $f(x) \neq 0$.
 בפרט: $g'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{f(x_0)^2}$

השאלה בעמוד 100

תשובה 15

א. נתון: $f(x) = \sqrt[3]{x}$. נגזור כחזקה:
 $f'(x) = (x^{1/3})' = \frac{1}{3}x^{1/3-1} = \frac{1}{3}x^{-2/3} = \frac{1}{3x^{2/3}} = \frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2}$
 ב. נתון: $f(x) = x/\sqrt[5]{x}$. נגזור כחזקה:
 $f'(x) = \left(\frac{x}{x^{1/5}}\right)' = (x^{1-1/5})' = (x^{4/5})' = \frac{4}{5}x^{(4/5)-1} = \frac{4}{5}x^{-1/5} = \frac{4}{5\sqrt[5]{x}}$
 ג. נתון $f(x) = \sqrt{3x}$. נפשט: $f(x) = \sqrt{3} \cdot \sqrt{x}$. נגזור:
 $f'(x) = \sqrt{3} \cdot (\sqrt{x})' = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x}}$
 ד. נתון: $f(x) = x/(\sqrt{x} + 1)$. נגזור לפי כלל נגזרת המנה:
 $f'(x) = \left(\frac{x}{\sqrt{x} + 1}\right)' = \frac{1 \cdot (\sqrt{x} + 1) - x \cdot (\sqrt{x} + 1)'}{(\sqrt{x} + 1)^2} = \frac{\sqrt{x} + 1 - x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x} + 1)^2}$
 $= \frac{\sqrt{x} + 1 - \frac{\sqrt{x}}{2}}{(\sqrt{x} + 1)^2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{x}}{2}}{(\sqrt{x} + 1)^2} = \frac{2 + \sqrt{x}}{2(\sqrt{x} + 1)^2}$

השאלה בעמוד 101

תשובה 16

א. נתונות: $f(x) = x^2 - x$, $g(x) = \frac{1}{x}$
 נחשב את ההרכבות $f \circ g$, $g \circ f$:
 $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \left(\frac{1}{x}\right)^2 - \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$
 תחום ההגדרה של $f \circ g$ הוא (זהו לתחום ההגדרה של g): $\{x \mid x \neq 0\}$.
 $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{1}{x^2 - x}$
 תחום ההגדרה של $g \circ f$ הוא $\{x \mid f(x) \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$

$$g(x) = \sqrt{x}, \quad h(x) = x\sqrt{x} - \sqrt{x} \quad \text{ב. נתונות:}$$

$$h(x) = (\sqrt{x})^3 - \sqrt{x} = g(x)^3 - g(x) \quad \text{נבטא את } h(x) \text{ כך:}$$

$$f(x) = x^3 - x \quad \text{לכן } h = f \circ g, \text{ עבור:}$$

תשובה 17

א. נתונה הפונקציה: $f(x) = (2x+1)^4$. פונקציה זו מוגדרת עבור כל x ממשי.

$$f = g \circ h \quad \text{נציג את } f \text{ כהרכבה}$$

$$g(x) = x^4, \quad h(x) = 2x+1 \quad \text{עבור הפונקציות הבאות:}$$

לפי כלל השרשרת, עבור כל x ממשי:

$$f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x) = 4(2x+1)^3 \cdot 2 = 8(2x+1)^3$$

$$f(x) = (1-x)^{10} \quad \text{ב. נתונה הפונקציה:}$$

פונקציה זו מוגדרת עבור כל x ממשי.

נגזור ישירות, לפי כלל השרשרת. לכל x ממשי:

$$f'(x) = 10 \cdot (1-x)^9 \cdot (1-x)' = -10(1-x)^9$$

$$f(x) = (2-x)^{-5} \quad \text{ג. נתונה הפונקציה:}$$

פונקציה זו מוגדרת עבור כל $x \neq 2$. עבור כל x כזה, נגזור ישירות לפי כלל השרשרת:

$$f'(x) = (-5)(2-x)^{-6} \cdot (-1) = \frac{5}{(2-x)^6}$$

$$f(x) = \sqrt{1-x^2} \quad \text{ד. נתונה הפונקציה:}$$

פונקציה זו מוגדרת לכל x שעבורו $1-x^2 \geq 0$, כלומר בקטע $[-1,1]$.

לכל $x \in (-1,1)$ (כלומר לא בקצה תחום ההגדרה) מתקיים $1-x^2 > 0$, ולכן פונקציית השורש גזירה בנקודה $1-x^2$. נגזור לפי כלל השרשרת:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (1-x^2)' = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f(x) = \sqrt{-x} \quad \text{ה. נתונה הפונקציה:}$$

פונקציה זו מוגדרת לכל $x \leq 0$.

לכל $x < 0$ (כלומר לא בקצה תחום ההגדרה) מתקיים $-x > 0$ ולכן פונקציית השורש גזירה בנקודה $-x$. נגזור לפי כלל השרשרת:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{-x}} \cdot (-x)' = \frac{-1}{2\sqrt{-x}}$$

השאלה בעמוד 103

תשובה 18

נכתוב את משוואת האליפסה $x^2 + 3y^2 = 7$, ובנקודה $P = (2, -1)$ שעליה.

$\Leftrightarrow 3y^2 = 7 - x^2$ נכתוב את משוואת האליפסה באופן שקול:

$$\Leftrightarrow y^2 = \frac{7 - x^2}{3} \Leftrightarrow y = \pm \sqrt{\frac{7 - x^2}{3}}$$

לכן ניתן לראות את האליפסה כאיחוד של שני גרפים:

הגרף הראשון מתאר את חצייה העליון של האליפסה: $y = f_1(x) = \sqrt{\frac{7 - x^2}{3}}$

הגרף השני מתאר את חצייה התחתון של האליפסה: $y = f_2(x) = -\sqrt{\frac{7 - x^2}{3}}$

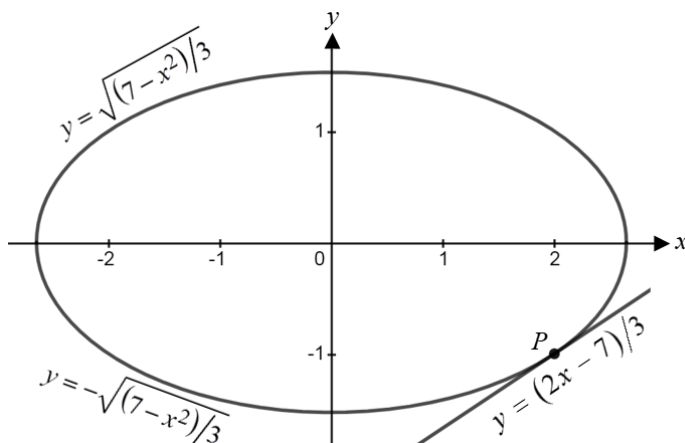
הנקודה P שייכת לחצייה התחתון של האליפסה, כי שיעור y שלה הוא שלילי. כדי למצוא את שיפוע המשיק לאליפסה ב- P , נגזור את הפונקציה f_2 בנקודה $x = 2$.

לפי כלל השרשרת: $f_2'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{(7 - x^2)/3}} \cdot \left(\frac{7 - x^2}{3}\right)'$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{(7 - x^2)/3}} \cdot \frac{-2x}{3} = \frac{x}{3\sqrt{(7 - x^2)/3}}$$

נציב $x = 2$: $f_2'(2) = \frac{2}{3\sqrt{(7 - 2^2)/3}} = \frac{2}{3}$

הישר המשיק הוא, אפוא: $y = \frac{2}{3}(x - 2) + (-1) = \frac{2}{3}x - \frac{7}{3} = \frac{2x - 7}{3}$



השאלה בעמוד 106

תשובה 19

א. נגזור את הפונקציה $f(x) = \cot(2x)$, בכל תחום הגדרתה:

לפי כלל השרשרת, $f'(x) = \cot'(2x) \cdot (2x)' = \frac{-1}{\sin^2 2x} \cdot 2 = \frac{-2}{\sin^2 2x}$

ב. נגזור את הפונקציה $f(x) = \cos^5 x$, בכל x ממשי:

$$f'(x) = 5\cos^4 x \cdot \cos'(x) = -5\cos^4 x \sin x, \quad \text{לפי כלל השרשרת,}$$

ג. נתונה הפונקציה $f(x) = 1/(2 + \sin x)$. פונקציה זו מוגדרת בכל הישר, כי $\sin x \geq -1$

לכל x , ולכן $\sin x + 2 \geq 1 > 0$. נגזור את הפונקציה בכל x ממשי:

נבטא את הפונקציה f כהרכבת פונקציות, $f(x) = g(h(x))$ עם הפונקציות הבאות:

$$g(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}, \quad h(x) = 2 + \sin x$$

$$g'(x) = -x^{-2}, \quad g'(h(x)) = -(2 + \sin x)^{-2} \quad \text{נקבל:}$$

נגזור לפי כלל השרשרת:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left((2 + \sin x)^{-1} \right)' = -(2 + \sin x)^{-2} \cdot (2 + \sin x)' \\ &= -\frac{0 + \cos x}{(2 + \sin x)^2} = \frac{-\cos x}{(2 + \sin x)^2} \end{aligned}$$

ד. נגזור את הפונקציה $f(x) = \tan x \tan 3x$, לפי כלל נגזרת המכפלה:

לכל x בתחום הגדרת הפונקציה (כלומר כל x שעבורו $\cos x \neq 0, \cos 3x \neq 0$),

$$\begin{aligned} f'(x) &= \tan'(x) \tan 3x + \tan x (\tan 3x)' \\ &= \tan'(x) \tan 3x + \tan x \cdot \tan'(3x) \cdot 3 \\ &= \frac{\tan 3x}{\cos^2 x} + \frac{3 \tan x}{\cos^2(3x)} \end{aligned} \quad \text{לפי כלל השרשרת:}$$

ה. נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt{\sin x}$.

הפונקציה מוגדרת עבור כל x המקיים $\sin x \geq 0$, כלומר לכל x המקיים

$2\pi k \leq x \leq \pi + 2\pi k$ עבור k שלם. נחשב את נגזרתה בכל x שעבורו $\sin x > 0$:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\sin x}} \cdot (\sin x)' = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}, \quad \text{לפי כלל השרשרת,}$$

ו. נגזור את הפונקציה $f(x) = \sin^5 x - 3\sin^2 x + 1$, בכל x ממשי:

לפי כלל גזירת הסכום וכלל השרשרת,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5\sin^4 x \sin'(x) - 3 \cdot 2\sin x \cdot \sin'(x) + 0 \\ &= 5\sin^4 x \cos x - 6\sin x \cos x = \sin x \cos x (5\sin^3 x - 6) \end{aligned}$$

ז. נגזור את הפונקציה $f(x) = \cos(x^2)$, בכל x ממשי:

לפי כלל השרשרת,

$$f'(x) = \cos'(x^2) \cdot (x^2)' = -2x \sin(x^2)$$

ח. נגזור את הפונקציה $f(x) = \cos 2x + 2\sin^2 x$, בכל x ממשי:

לפי כלל גזירת הסכום וכלל השרשרת,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos'(2x) \cdot 2 + 2 \cdot 2\sin x \cdot \sin'(x) \\ &= -\sin(2x) \cdot 2 + 4\sin x \cos x = -4\sin x \cos x + 4\sin x \cos x = 0 \end{aligned}$$

הערה: ניתן לפתור גם כך –

לפי נוסחאות הקוסינוס של זווית כפולה, $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

$$f(x) = \cos 2x + 2\sin^2 x = (1 - 2\sin^2 x) + 2\sin^2 x = 1 \quad \text{לכן}$$

f היא פונקציה קבועה ולכן נגזרתה מתאפסת.

תשובה 20

א. נגזור את הפונקציה $f(x) = e^{2x}$, בכל x ממשי:

$$f'(x) = e^{2x} \cdot (2x)' = 2e^{2x} \quad \text{לפי כלל השרשרת,}$$

ב. נגזור את הפונקציה $f(x) = (e^x)^3$, בכל x ממשי:

$$f'(x) = 3(e^x)^2 \cdot e^x = 3e^{2x}e^x = 3e^{3x} \quad \text{לפי כלל השרשרת, וחוקי החזקות:}$$

הערה: ניתן לפתור גם כך –

נבטא תחילה, לפי חוקי החזקות $f(x) = e^{3x}$

$$f'(x) = e^{3x} \cdot (3x)' = 3e^{3x} \quad \text{לכן, לפי כלל השרשרת}$$

ג. נגזור את הפונקציה $f(x) = (1 + e^x)^5$, בכל x ממשי:

$$f'(x) = 5(1 + e^x)^4 \cdot (1 + e^x)' = 5e^x (1 + e^x)^4 \quad \text{לפי כלל השרשרת,}$$

ד. נגזור את הפונקציה $f(x) = e^x(x^4 + 2x^3)$ לפי כלל גזירת המכפלה:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (e^x)'(x^4 + 2x^3) + e^x(x^4 + 2x^3)' \\ &= e^x(x^4 + 2x^3) + e^x(4x^3 + 6x^2) \\ &= e^x(x^4 + 6x^3 + 6x^2) \end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{x^2 + \sqrt{x}}{e^x} \quad \text{ה. נתונה הפונקציה}$$

תחום הגדרת הפונקציה הוא $[0, \infty)$. נגזור אותה בכל $x > 0$:

$$f(x) = (x^2 + \sqrt{x})e^{-x} \quad \text{נבטא}$$

$$f'(x) = (x^2 + \sqrt{x})'e^{-x} + (x^2 + \sqrt{x})(e^{-x})' \quad \text{לפי כלל גזירת המכפלה:}$$

$$= \left(2x + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)e^{-x} + (x^2 + \sqrt{x})e^{-x} \cdot (-1) \quad \text{לפי כלל השרשרת:}$$

$$= e^{-x} \left(2x + \frac{1}{2\sqrt{x}} - x^2 - \sqrt{x}\right)$$

א. נתונה הפונקציה $f(x) = \ln(3x)$.

פונקציה זו מוגדרת עבור כל $x > 0$. נגזור לפי כלל השרשרת:

$$f'(x) = \frac{1}{3x} \cdot (3x)' = \frac{3}{3x} = \frac{1}{x}$$

דרך פתרון נוספת: נציג לפי חוקי הלוגריתמים,

$$f(x) = \ln 3 + \ln x \quad \text{ולכן} \quad f'(x) = 0 + \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$$

ב. נתונה הפונקציה $f(x) = \ln(x^2 + 1)$. פונקציה זו מוגדרת בכל הישר (כי $x^2 + 1 > 0$), ונגזרתה בכל x ממשי היא, לפי כלל השרשרת:

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \cdot (x^2 + 1)' = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

ג. נתונה הפונקציה $f(x) = 1/\ln x$. הפונקציה מוגדרת לכל x שעבורו $\ln x$ מוגדר ושונה מאפס, כלומר, לכל x חיובי ושונה מ-1. בכל x כזה, נגזור לפי כלל השרשרת (כהרכבת הפונקציות $g(x) = 1/x = x^{-1}$, $h(x) = \ln x$):

$$f'(x) = -(\ln x)^{-2} \cdot (\ln x)' = \frac{-1}{x \ln^2 x}$$

ד. נתונה הפונקציה $f(x) = \log_3(x)$. פונקציה זו מוגדרת לכל $x > 0$.

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \quad \text{הוכחנו את הנוסחה:}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x \ln 3} \quad \text{לכן (לכל } x > 0 \text{):}$$

ה. נתונה הפונקציה $f(x) = (x+1)^{x-1}$. פונקציה זו מוגדרת לכל x שעבורו $x+1 > 0$, כלומר, בקטע $(-1, \infty)$. נבטא את הפונקציה בעזרת הזהות $a^b = e^{b \ln a}$:
 $\triangleleft$ כללית, החזקה הממשית a^b הוגדרה עבור $a > 0, b \in \mathbb{R}$ (ראו שיעור 7).

$$f(x) = e^{(x-1) \ln(x+1)}$$

נתבונן בפונקציה (המגדירה את מעריך החזקה):

גם פונקציה זו מוגדרת לכל $x > -1$, ונגזרתה שם היא

$$\begin{aligned} g'(x) &= (x-1)' \ln(x+1) + (x-1) \ln'(x+1) \cdot (x+1)' \\ &= 1 \cdot \ln(x+1) + (x-1) \cdot \frac{1}{x+1} \cdot 1 \\ &= \ln(x+1) + \frac{x-1}{x+1} \end{aligned}$$

נגזור את f לפי כלל השרשרת:

$$f'(x) = e^{g(x)} g'(x) = f(x) g'(x) \quad \text{לכן לכל } x \in (-1, \infty),$$

$$= (x+1)^{(x-1)} \left(\ln(x+1) + \frac{x-1}{x+1} \right)$$

ו. נתונה הפונקציה $f(x) = \ln \cos x$.

תחום הגדרת הפונקציה הוא קבוצת ערכי x שעבורם $\cos x > 0$, כלומר:

$$\left\{ x \mid -\frac{\pi}{2} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

בתחום זה נגזור לפי כלל השרשרת:

$$f'(x) = \ln'(\cos x) \cdot \cos'(x) = \frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) = -\tan x$$

השאלה בעמוד 112

תשובה 22

א. נתונה הפונקציה $f(x) = x^3/3 + x^2 - x - 1$. נגזרתה בכל נקודה ממשית היא

$$f'(x) = \frac{3x^2}{3} + 2x - 1 = x^2 + 2x - 1$$

ב. נתונה הפונקציה $f(x) = x/(8x+1)$. הפונקציה מוגדרת עבור $x \neq -1/8$. נגזרתה

בתחום זה היא, לפי כלל גזירת המנה,

$$f'(x) = \frac{(x)' \cdot (8x+1) - x \cdot (8x+1)'}{(8x+1)^2} = \frac{(8x+1) - 8x}{(8x+1)^2} = \frac{1}{(8x+1)^2}$$

ג. נתונה הפונקציה $f(x) = (1-x^{10})^5$. נגזרתה בכל נקודה ממשית היא, לפי כלל השרשרת,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5(1-x^{10})^4 \cdot (1-x^{10})' = 5(1-x^{10})^4 (-10x^9) \\ &= -50(1-x^{10})^4 x^9 \end{aligned}$$

ד. נתונה הפונקציה $f(x) = \sin 5x + \tan x^2$. פונקציה זו מוגדרת לכל x שעבורו

$\cos x^2 \neq 0$. נגזרתה בתחום זה היא, לפי כלל השרשרת,

$$f'(x) = \cos 5x \cdot (5x)' + \frac{1}{\cos^2(x^2)} \cdot (x^2)' = 5 \cos 5x + \frac{2x}{\cos^2(x^2)}$$

ה. נתונה הפונקציה $f(x) = \ln(2x^2 + 1)$. פונקציה זו מוגדרת עבור כל x ממשי, כי

$2x^2 + 1 > 0$. נגזרתה, לפי כלל השרשרת, היא

$$f'(x) = \frac{1}{2x^2 + 1} \cdot (2x^2 + 1)' = \frac{4x}{2x^2 + 1}$$

ו. נתונה הפונקציה $f(x) = 5^{\sqrt{x}}$. פונקציה זו מוגדרת עבור כל $x \geq 0$.

נגזור את הפונקציה עבור כל $x > 0$. נבטא אותה כך:

$$f(x) = e^{\sqrt{x} \ln 5}$$

$$f'(x) = e^{\sqrt{x} \ln 5} \cdot (\sqrt{x} \ln 5)' = 5^{\sqrt{x}} \cdot \frac{\ln 5}{2\sqrt{x}}$$

לפי כלל השרשרת:

השאלה בעמוד 112

תשובה 23

נתונה נוסחת גובה הכדור בזמן t : $h(t) = 15 - \frac{gt^2}{2}$, $g \approx 9.8$

א. ברגע שבו הכדור פוגע בקרקע, מתקיים $h(t) = 0$. נפתור משוואה זו:

$$h(t) = 0 \Rightarrow 15 - \frac{gt^2}{2} = 0 \Rightarrow 4.9t^2 = 15 \Rightarrow t^2 = \frac{15}{4.9}$$

$$t = \sqrt{\frac{15}{4.9}} \approx 1.75 \quad t \text{ הוא חיובי, ולכן:}$$

הכדור יפגע בקרקע לאחר כ-1.75 שניות.

ב. נגזור את הפונקציה h : $h'(t) = -gt$

גודל זה מבטא את המהירות ואת הכיוון ביחס לקרקע. במקרה זה אנו מעוניינים רק בערכה המוחלט (הכיוון ידוע לנו). לכן המהירות לאחר שנייה היא

$$|h'(1)| = g \approx 9.8$$

כלומר כ-9.8 מטרים לשנייה.

ג. לפי תוצאות הסעיפים הקודמים, המהירות ברגע הפגיעה בקרקע היא

$$\left| h' \left(\sqrt{\frac{15}{4.9}} \right) \right| = g \cdot \sqrt{\frac{15}{4.9}} \approx 17.2$$

כלומר כ-17.2 מטרים לשנייה.

השאלה בעמוד 115

תשובה 24

א. נתונה הפונקציה, המוגדרת בכל הישר: $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$

נגזור את הפונקציה: $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x^2 - 3x + 2)$

נפרק לגורמים: $f'(x) = 6(x-1)(x-2)$

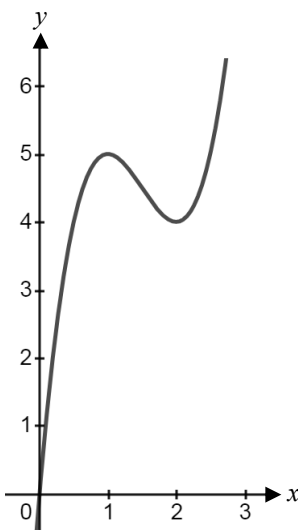
הנגזרת מתאפסת עבור $x = 1$ ו- $x = 2$, שלילית עבור $1 < x < 2$, וחיובית עבור $x < 1$ ו- $x > 2$.

לכן הפונקציה עולה בקטע $(-\infty, 1]$, יורדת בקטע $[1, 2]$, ועולה בקטע $[2, \infty)$.
גרף הפונקציה מוצג באיור משמאל.

ב. נתונה הפונקציה הריבועית, המוגדרת בכל הישר: $f(x) = x - 6x^2$

נגזור: $f'(x) = 1 - 12x = 12 \left(\frac{1}{12} - x \right)$

הנגזרת חיובית עבור $x < 1/12$, מתאפסת ב- $x = 1/12$, ושלילית עבור $x > 1/12$. לכן הפונקציה עולה בקטע $(-\infty, 1/12]$ ויורדת בקטע $[1/12, \infty)$.



ג. נתונה הפונקציה, המוגדרת בכל הישר:

$$f(x) = e^x (3 - x)$$

נגזור:

$$f'(x) = e^x (3 - x) + e^x \cdot (-1) = e^x (2 - x)$$

נגזרת הפונקציה חיובית עבור $x < 2$, מתאפסת ב- $x = 2$, ושלילית עבור $x > 2$.

לכן הפונקציה עולה בקטע $(-\infty, 2]$ ויורדת בקטע $[2, \infty)$.

השאלה בעמוד 120

תשובה 25

א. נתבונן בפונקציה $f(x) = 5 - 2x$ בקטע $[-1, 1]$.

פונקציה זו היא יורדת (כפונקציה לינארית בעלת שיפוע שלילי). לכן נקודות הקיצון שלה הן קצות הקטע:

$$-1 \text{ היא נקודת המקסימום, וערך המקסימום הוא } f(-1) = 5 - 2 \cdot (-1) = 7$$

$$1 \text{ היא נקודת המינימום, וערך המינימום הוא } f(1) = 5 - 2 \cdot 1 = 3$$

ב. כאמור בתשובה 24, הפונקציה $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$ עולה בקטע $(-\infty, 1]$, יורדת בקטע $[1, 2]$, ועולה שוב בקטע $[2, \infty)$.

בצמצום לקטע $[0, 2]$, הפונקציה עולה בקטע $[0, 1]$ ויורדת בקטע $[1, 2]$.

נחשב את ערכי הפונקציה בקצוות תחומי העלייה והירידה:

$$f(0) = 0, f(1) = 2 - 9 + 12 = 5, f(2) = 2 \cdot 8 - 9 \cdot 4 + 12 \cdot 2 = 4$$

נקודת המינימום של הפונקציה בקטע היא $x = 0$. המינימום של הפונקציה בקטע הוא 0. נקודת המקסימום היא $x = 1$, והמקסימום הוא 5.

ג. כאמור בתשובה 24, הפונקציה $f(x) = e^x (3 - x)$ עולה בקטע $(-\infty, 2]$ ויורדת בקטע $[2, \infty)$. בצמצום לקטע $[0, 3]$, הפונקציה עולה ב- $[0, 2]$ ויורדת ב- $[2, 3]$.

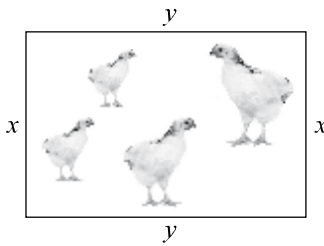
נחשב את ערכי הפונקציה בקצוות תחומי העלייה והירידה:

$$f(0) = e^0 \cdot 3 = 3, f(2) = e^2 \approx 7.39, f(3) = 0$$

נקודת המינימום של הפונקציה בקטע היא $x = 3$. המינימום של הפונקציה בקטע הוא 0. נקודת המקסימום היא $x = 2$, והמקסימום הוא e^2 .

השאלה בעמוד 120

תשובה 26



נסמן ב- x וב- y את אורך ורוחב החצר, בהתאמה.

לפי הנתון, היקף המלבן שווה לאורך הגדר שברשות האיכר:

$$2x + 2y = 100 \Rightarrow x + y = 50$$

האורך והרוחב הם, כמובן, מספרים חיוביים. לכן $0 < x < 50$.

$$xy = x(50 - x)$$

שטח החצר הוא:

$$f(x) = x(50 - x)$$

נגדיר:

כדי ששטח החצר יהיה מקסימלי, עלינו לבחור $0 < x < 50$ שעבורו $f(x)$ מקסימלי.

$$f(x) = 50x - x^2$$

נחקור את הפונקציה f :

$$f'(x) = 50 - 2x = 2(25 - x)$$

הפונקציה היא ריבועית. נגזרתה היא:

הנגזרת חיובית עבור $x < 25$, מתאפסת ב- $x = 25$, ושלילית עבור $x > 25$.

לכן הפונקציה f עולה בקטע $(0, 25]$ ויורדת בקטע $[25, 50)$.

המקסימום של f מתקבל בנקודה $x = 25$. מערך זה נקבל: $y = 25$.

קיבלנו ששטח החצר מקסימלי כשאורכה ורוחבה הם 25 מטרים.

במילים אחרות, שטח החצר מקסימלי כאשר צורתה היא ריבוע.

השאלה בעמוד 120

תשובה 27

אם גובה הקופסה הוא x , יהיה אורך צלעו של ריבוע הבסיס $a - 2x$, ונפח הקופסה יהיה:

$$V(x) = (a - 2x)^2 \cdot x$$

המקסימום של הפונקציה $V(x)$ עבור $0 < x < a/2$ הוא הנפח המקסימלי אותו אנו מבקשים.

נגזור את הפונקציה V :

$$\begin{aligned} V'(x) &= 2(a - 2x)(-2) \cdot x + (a - 2x)^2 = (a - 2x)(a - 6x) \\ &= 12 \left(\frac{a}{2} - x \right) \left(\frac{a}{6} - x \right) \end{aligned}$$

הנגזרת מתאפסת בנקודה $x = a/6$ (וגם בנקודה $x = a/2$ שאינה בקטע הרלוונטי).

הנגזרת חיובית עבור $0 < x < a/6$ ושלילית עבור $a/6 < x < a/2$.

לכן הפונקציה V עולה בקטע $(0, a/6]$, ויורדת בקטע $[a/6, a/2)$. מכאן ש- V מקבלת את

ערכה המקסימלי בנקודה $x = a/6$.

$$V\left(\frac{a}{6}\right) = \left(a - \frac{a}{3}\right)^2 \cdot \frac{a}{6} = \frac{2}{27}a^3$$

הנפח המקסימלי יהיה אפוא:

השאלה בעמוד 121

תשובה 28

נתבונן בפונקציה: $f(x) = 2^x - \frac{x}{2} - 1$

הפונקציה מוגדרת בכל הישר, ונגזרתה היא: $f'(x) = 2^x \ln 2 - \frac{1}{2}$

כאמור בשיעור 7, הפונקציה $g(x) = 2^x$ עולה. כמו כן, $\ln 2 \approx 0.69 > \frac{1}{2}$.

לפיכך, לכל $x \geq 0$: $f'(x) \geq 2^0 \ln 2 - \frac{1}{2} = \ln 2 - \frac{1}{2} > 0$

מכאן נסיק שהפונקציה f עולה ב- $[0, \infty)$, ובפרט, לכל $x > 0$:

$$f(x) > f(0) = 2^0 - 0 - 1 = 0$$

קיבלנו ש- $f(x) > 0$ לכל $x > 0$, כלומר $2^x - \frac{x}{2} - 1 > 0$

נעביר אגפים: $2^x > \frac{x}{2} + 1$

והוכחנו את הנדרש.

השאלה בעמוד 121

תשובה 29

א. נתבונן בפונקציה: $f(x) = x - \sin x$

פונקציה זו מוגדרת בכל הישר, ונגזרתה היא $f'(x) = 1 - \cos x$

מכך ש- $\cos x \leq 1$ לכל x נקבל $-\cos x \geq -1$, ולכן

$$f'(x) = 1 + (-\cos x) \geq 0$$

יתרה מכך, הנגזרת $f'(x)$ מתאפסת רק כאשר $\cos x = 1$, מה ששקול לכך ש- $x = 2\pi k$ עבור k שלם. לכן אין אף קטע שבו הנגזרת מתאפסת, כלומר, נקודות ההתאפסות של הנגזרת מבודדות.

לפי משפט 11.19, הפונקציה f עולה בכל הישר.

בפרט, לכל $x > 0$ מתקיים: $f(x) > f(0) = 0$

כלומר, $x - \sin x > 0$

ומכאן $\sin x < x$

כפי שרצינו להוכיח.

ב. נתבונן בפונקציה: $f(x) = \cos x - 1 + x^2/2$

פונקציה זו מוגדרת בכל הישר, ונגזרתה היא

$$f'(x) = -\sin x + x = x - \sin x$$

$$f'(0) = 0 - \sin 0 = 0 \quad \text{נציב } x = 0$$

$$f'(x) = x - \sin x > 0 \quad \text{לכל } x > 0 \text{ מתקיים, לפי סעיף א:}$$

לכן f עולה, ובפרט לכל $x \geq 0$ מתקיים:

$$f(x) \geq f(0) = \cos 0 - 1 + 0 = 0$$

$$\cos x - 1 + x^2/2 \geq 0 \quad \text{נציב את הגדרת הפונקציה:}$$

$$\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2} \quad \text{נעביר אגפים:}$$

הוכחנו את האי־שוויון המבוקש עבור $x \geq 0$.

כעת נניח ש־ $x < 0$. אז $x > 0$, ולפי מה שהוכחנו:

$$\cos(-x) \geq 1 - \frac{(-x)^2}{2}$$

$$\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2} \quad \text{מזוגיות פונקציית הקוסינוס והפונקציה } g(x) = x^2, \text{ נסיק:}$$

לכן האי־שוויון המבוקש נכון לכל x ממשי.

השאלה בעמוד 123

תשובה 30

$$f(x) = (1+x)^5(2-x)^3 \quad \text{א. נתונה הפונקציה המוגדרת בכל הישר:}$$

נגזרתה בתחום זה היא:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5(1+x)^4(2-x)^3 + (1+x)^5 \cdot 3(2-x)^2 \cdot (-1) \\ &= (1+x)^4(2-x)^2(5(2-x) - 3(1+x)) \\ &= (1+x)^4(2-x)^2(7-8x) \end{aligned}$$

ב. נתונה הפונקציה $f(x) = (8x+1)/(6-7x)$. פונקציה זו מוגדרת לכל $x \neq 6/7$. נגזרתה בתחום זה היא

$$f'(x) = \frac{8(6-7x) - (8x+1) \cdot (-7)}{(6-7x)^2} = \frac{55}{(6-7x)^2}$$

ג. נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt[3]{1-2x}$. פונקציה זו מוגדרת לכל $x \leq 1/2$.

נגזור את הפונקציה עבור $x < 1/2$.

$$f(x) = (1-2x)^{1/3} \quad \text{נבטא:}$$

נגזור כחזקה, לפי כלל השרשרת:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{3}(1-2x)^{(1/3)-1} \cdot (1-2x)' = \frac{-2}{3}(1-2x)^{-2/3} \\ &= \frac{-2}{3(\sqrt[3]{1-2x})^2} \end{aligned}$$

ד. נתונה הפונקציה $f(x) = x^3 \sin x$. הפונקציה מוגדרת בכל הישר, ונגזרתה בתחום זה

$$f'(x) = 3x^2 \sin x + x^3 \cos x \quad \text{היא}$$

ה. נתונה הפונקציה $f(x) = \ln^{10} x$. הפונקציה מוגדרת לכל $x > 0$. נגזרתה בתחום זה היא,

$$f'(x) = 10 \ln^9 x \cdot \frac{1}{x} = \frac{10 \ln^9 x}{x} \quad \text{לפי כלל השרשרת:}$$

ו. נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{x}}$. פונקציה זו מוגדרת בקטע $[0, \infty)$. נגזור אותה

בקטע $(0, \infty)$, לפי כלל השרשרת:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1 + \sqrt{x}}} (1 + \sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{1 + \sqrt{x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{4\sqrt{1 + \sqrt{x}} \sqrt{x}}$$

השאלה בעמוד 123

תשובה 31

א. נתונה הפונקציה:

$$f(x) = \frac{x^2}{e^x} = x^2 e^{-x}$$

הפונקציה מוגדרת בכל הישר, ונגזרתה בתחום זה היא

$$f'(x) = 2x e^{-x} + x^2 e^{-x} \cdot (-1) = e^{-x} (2x - x^2) = e^{-x} \cdot x(2 - x)$$

הנגזרת מתאפסת עבור $x = 0$ ו- $x = 2$, שלילית עבור $x < 0$ ו- $x > 2$, וחיובית עבור $0 < x < 2$. לכן הפונקציה f יורדת בקטע $(-\infty, 0]$, עולה בקטע $[0, 2]$, ויורדת שוב בקטע $[2, \infty)$.

ב. נתונה הפונקציה:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$$

הפונקציה מוגדרת בכל הישר, ונגזרתה בתחום זה היא

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x^2 - 2x + 1) = 3(x - 1)^2$$

הנגזרת היא לפיכך אי-שלילית, ומתאפסת בנקודה יחידה $x = 1$. לכן הפונקציה f עולה בכל הישר.

ג. נתונה הפונקציה:

$$f(x) = x^5 - x^3 + 1$$

הפונקציה מוגדרת בכל הישר, ונגזרתה בתחום זה היא

$$f'(x) = 5x^4 - 3x^2 = 5x^2 \left(x^2 - \frac{3}{5} \right)$$

הנגזרת מתאפסת עבור $x = 0$ ו- $x = \pm\sqrt{3/5}$, שלילית עבור כל $-\sqrt{3/5} < x < \sqrt{3/5}$

המקיים $x \neq 0$, וחיובית עבור $x < -\sqrt{3/5}$ ו- $x > \sqrt{3/5}$. לכן הפונקציה עולה

בקטעים $(-\infty, -\sqrt{3/5}]$ ו- $[\sqrt{3/5}, \infty)$, ויורדת בקטע $[-\sqrt{3/5}, \sqrt{3/5}]$.

השאלה בעמוד 123

תשובה 32

א. נתבונן בפונקציה $f(x) = \sin x$ ובנקודה $x_0 = \pi/6$.

ערך הפונקציה בנקודה זו הוא $\sin \pi/6 = 1/2$ ולכן הנקודה המתאימה על הגרף היא $(\pi/6, 1/2)$.

שיפוע המשיק לפונקציה בנקודה זו הוא $\sin'(\pi/6) = \cos(\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

משוואת המשיק היא, אפוא: $y = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(x - \frac{\pi}{6} \right) + \frac{1}{2}$

ב. נתבונן תחילה בישר $2x - 3y = 1$. נבטא את משוואתו כך:

$$\Leftrightarrow 3y = 2x - 1 \Leftrightarrow y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$$

שיפוע הישר הוא $2/3$.

קעת נחפש נקודות על גרף הפונקציה $f(x) = x^3$ שהמשיק בהן לגרף הפונקציה מקביל לישר הנתון. תכונה זו שקולה לכך ששיפוע המשיק בנקודה יהיה $2/3$. נפתור אפוא את המשוואה $f'(x) = 2/3$:

$$f'(x) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 3x^2 = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x^2 = \frac{2}{9} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^3 = \frac{2\sqrt{2}}{27} \quad \text{ערכי הפונקציה בנקודות אלה הם}$$

$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^3 = -\frac{2\sqrt{2}}{27}$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{27}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{3}, -\frac{2\sqrt{2}}{27}\right) \quad \text{הנקודות המבוקשות על הגרף הן:}$$

השאלה בעמוד 123

תשובה 33

נתבונן בפונקציה $f(x) = 2^x - x$. פונקציה זו מוגדרת בכל הישר, ונגזרתה שם היא:

$$f'(x) = 2^x \ln 2 - 1$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2^x \ln 2 = 1 \Leftrightarrow 2^x = \frac{1}{\ln 2} \quad \text{נמצא מתי הנגזרת מתאפסת:}$$

$$\Leftrightarrow x = \log_2 \left(\frac{1}{\ln 2} \right) = -\log_2 (\ln 2) = -\frac{\ln \ln 2}{\ln 2}$$

$$x_0 = \log_2 \left(\frac{1}{\ln 2} \right) = -\frac{\ln \ln 2}{\ln 2} \approx 0.528 \quad \text{נסמן:}$$

$$f'(x_0) = 0 \quad \text{ערך זה מקיים:}$$

הפונקציה $g(x) = 2^x$ עולה, לכן לכל $x < x_0$ מתקיים

$$f'(x) = 2^x \ln 2 - 1 < 2^{x_0} \ln 2 - 1 = f'(x_0) = 0$$

$$f'(x) = 2^x \ln 2 - 1 > 2^{x_0} \ln 2 - 1 = f'(x_0) = 0 \quad \text{לכל } x > x_0 \text{ מתקיים:}$$

מצאנו שנגזרת הפונקציה f שלילית עבור $x < x_0$, מתאפסת בנקודה x_0 , וחיובית עבור $x > x_0$. לכן הפונקציה f יורדת בקטע $(-\infty, x_0]$ ועולה בקטע $[x_0, \infty)$.

הנקודה x_0 היא נקודת המינימום של הפונקציה f , וערכה המינימלי של הפונקציה הוא

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 2^{x_0} - x_0 = 2^{\log_2(1/\ln 2)} + \frac{\ln \ln 2}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2} + \frac{\ln \ln 2}{\ln 2} \\ &= \frac{1 + \ln \ln 2}{\ln 2} \approx 0.913 \end{aligned}$$

השאלה בעמוד 123

תשובה 34

בהינתן פונקציות $f_1, f_2, \dots, f_n$, ופונקציית הסכום:

$$S(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)$$

נוכיח שאם $f_1, f_2, \dots, f_n$ גזירות בנקודה x_0 אז גם פונקציית הסכום גזירה בנקודה זו,

$$S'(x_0) = \sum_{i=1}^n f'_i(x_0) = f'_1(x_0) + \dots + f'_n(x_0) \quad \text{ומתקיים:}$$

ההוכחה היא באינדוקציה על n .

עבור $n = 1$ מתקיים $S(x) = f_1(x)$, ולכן $S'(x_0) = f'_1(x_0)$ כנדרש.

כעת נניח שהטענה נכונה עבור n מסוים, ונוכיח אותה עבור $n + 1$.

בהינתן פונקציות $f_1, f_2, \dots, f_n, f_{n+1}$ נגדיר את הסכום

$$S(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + f_{n+1}(x)$$

$$T(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) \quad \text{נגדיר גם}$$

לפי הנחת האינדוקציה, T גזירה בנקודה x_0 ומתקיים

$$T'(x_0) = f'_1(x_0) + f'_2(x_0) + \dots + f'_n(x_0)$$

$$S(x) = T(x) + f_{n+1}(x) \quad \text{נשים לב שמתקיים:}$$

לפי כלל גזירת הסכום, S גזירה בנקודה x_0 ומתקיים

$$\begin{aligned} S'(x_0) &= T'(x_0) + f'_{n+1}(x_0) \\ &= (f'_1(x_0) + \dots + f'_n(x_0)) + f'_{n+1}(x_0) \\ &= f'_1(x_0) + \dots + f'_{n+1}(x_0) \end{aligned}$$

□

וצעד האינדוקציה הושלם.

השאלה בעמוד 123

תשובה 35

נתבונן בפונקציה $f(x) = \ln(1+x) - x$

פונקציה זו מוגדרת בכל $x > -1$ וגזירה בכל תחום הגדרתה.

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{1 - (1+x)}{1+x} = \frac{-x}{1+x}$$

נגזור את הפונקציה:

הנגזרת מתאפסת עבור $x = 0$, והיות ש- $1+x > 0$ בתחום הגדרת f , הנגזרת חיובית עבור $x < 0$ ושלילית עבור $x > 0$.

לכן f עולה בקטע $(-1, 0]$, ויורדת בקטע $[0, \infty)$.

הווה אומר, לכל $x \neq 0$ בקטע $(-1, \infty)$, בין אם הוא חיובי, ובין אם הוא שלילי, מתקיים:

$$f(x) < f(0) = 0$$

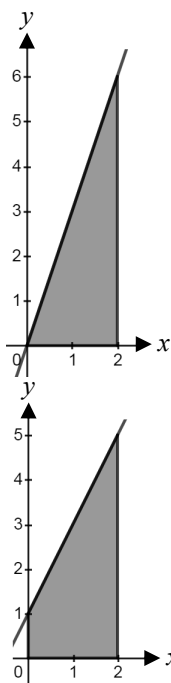
$$\ln(1+x) - x < 0 \quad \text{לכל } x \neq 0 \text{ בקטע } (-1, \infty) \text{ מתקיים אפוא}$$

$$\ln(1+x) < x \quad \text{כלומר,}$$

כפי שרצינו להוכיח.

פתרונות לשאלות בשיעור 12

השאלה בעמוד 126



השאלה בעמוד 132

תשובה 1

- א. לפי הנוסחה $\int_a^b c dx = c(b-a)$: $\int_2^5 7 dx = 7 \cdot (5-2) = 21$
- ב. האינטגרל $\int_0^2 3x dx$ שווה לשטח שמתחת לגרף הפונקציה $f(x) = 3x$ בקטע $[0, 2]$. צורת האזור שמתחת לגרף היא משולש ישר-זווית, שאורכי ניצביו הם 2 ו-6 (ראו באיור משמאל). לכן השטח הוא:
- $$\int_0^2 3x dx = \frac{2 \cdot 6}{2} = 6$$
- ג. האינטגרל $\int_0^2 (2x+1) dx$ שווה לשטח שמתחת לגרף הפונקציה $f(x) = 2x+1$ בקטע $[0, 2]$. צורת האזור שמתחת לגרף היא טרפז, שאורכי בסיסיו הם 1 ו-5, וגובהו הוא 2 (ראו באיור משמאל). לפי נוסחת שטח הטרפז, השטח הוא:

$$\int_0^2 (2x+1) dx = \frac{2 \cdot (1+5)}{2} = 6$$

תשובה 2

- נתונה הפונקציה: $f(x) = 1/x$ בקטע $[1, 7]$.
- א. נקרב את האינטגרל $\int_1^7 f(x) dx$ על ידי חלוקת הקטע $[1, 7]$ לשלושה חלקים:
- אורך הקטע הוא $7-1=6$, לכן אורך כל חלק הוא $\Delta x = \frac{6}{3} = 2$
- נקודות החלוקה הן: $x_0 = 1, x_1 = 3, x_2 = 5, x_3 = 7$
- סכום שטחי המלבנים הוא:
- $$\sum_{i=0}^2 f(x_i) \cdot \Delta x = (f(x_0) + f(x_1) + f(x_2)) \cdot 2 = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \right) \cdot 2 \approx 3.07$$
- ב. נקרב את אותו האינטגרל, על ידי חלוקת הקטע לשישה חלקים. במקרה זה אורך כל חלק הוא $\Delta x = 6/6 = 1$, ונקודות החלוקה הן:
- $$x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 3, \dots, x_6 = 7$$
- סכום שטחי המלבנים, במקרה זה, הוא
- $$\sum_{i=0}^5 f(x_i) \cdot \Delta x = (f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_5)) \cdot 1$$
- $$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = 2.45$$
- הערה: חישוב מדויק יותר, בטכניקות שיילמדו בהמשך, יעלה כי $\int_1^7 (1/x) dx \approx 1.95$.

השאלה בעמוד 137

תשובה 3

א. הפונקציה $F(x) = 3x$ היא פונקציה קדומה לפונקציה $f(x) = 3$, כי
 $F'(x) = 3 = f(x)$

ב. הפונקציה $F(x) = x^2$ היא פונקציה קדומה לפונקציה $f(x) = 2x$, כי
 $F'(x) = 2x = f(x)$

ג. לפי משפט 12.2:

- לכל C ממשי, הפונקציה $F(x) = 3x + C$ היא פונקציה קדומה לפונקציה $f(x) = 3$, ואלה הן כל הפונקציות הקדומות לפונקציה זו.
- לכל C ממשי, הפונקציה $F(x) = x^2 + C$ היא פונקציה קדומה לפונקציה $f(x) = 2x$, ואלה הן כל הפונקציות הקדומות לפונקציה זו.

הערה: מצאנו את הפונקציות הקדומות בסעיפים א ו-ב על בסיס ניחוש בלבד. בהמשך נלמד טכניקות למציאה שיטתית יותר של פונקציות קדומות.

השאלה בעמוד 137

תשובה 4

א. כפי שראינו בשאלה הקודמת, הפונקציה $F(x) = 3x$ היא פונקציה קדומה לפונקציה $f(x) = 3$. לפי המשפט היסודי:

$$\int_3^5 3dx = F(5) - F(3) = 3 \cdot 5 - 3 \cdot 3 = 15 - 9 = 6$$

$$\int_3^5 3dx = 3x \Big|_3^5 = 3 \cdot 5 - 3 \cdot 3 = 6 \quad \text{ניתן לכתוב גם כך:}$$

ב. כפי שראינו בשאלה הקודמת, הפונקציה $F(x) = x^2$ היא פונקציה קדומה לפונקציה $f(x) = 2x$. לפי המשפט היסודי:

$$\int_1^5 2xdx = F(5) - F(1) = 5^2 - 1^2 = 24$$

$$\int_1^5 2xdx = x^2 \Big|_1^5 = 5^2 - 1^2 = 24 \quad \text{ניתן לכתוב גם כך:}$$

השאלה בעמוד 137

תשובה 5

הפונקציה $F(x) = x^3/3$ היא פונקציה קדומה של הפונקציה $f(x) = x^2$, כי:

$$F'(x) = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2$$

$$\int_0^{10} x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^{10} = \frac{10^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1000}{3} \approx 333.33 \quad \text{לפי המשפט היסודי:}$$

השאלה בעמוד 138

תשובה 6

א. כפי שראינו בתשובה 3, הפונקציה $F(x) = 3x$ היא פונקציה קדומה לפונקציה

$$f(x) = 3 \quad \text{לכן} \quad \int 3dx = 3x + C$$

ב. הפונקציה $F(x) = -x^2$ היא פונקציה קדומה לפונקציה $f(x) = -2x$, כי

$$F'(x) = -2x \quad \text{לכן:} \quad \int -2x dx = -x^2 + C$$

ג. הפונקציה $F(x) = 2x^2$ היא פונקציה קדומה לפונקציה $f(x) = 4x$, כי

$$F'(x) = 2 \cdot 2x = 4x \quad \text{לכן:} \quad \int 4x dx = 2x^2 + C$$

ד. הפונקציה $F(x) = x^4$ היא פונקציה קדומה לפונקציה $f(x) = 4x^3$, כי

$$F'(x) = 4x^3 \quad \text{לכן:} \quad \int 4x^3 dx = x^4 + C$$

הערה: כמו בתשובה 3, מצאנו את הפונקציות הקדומות בתשובה זו בעזרת ניחוש. בקרוב נלמד שיטות למשימה זו.

השאלה בעמוד 139

תשובה 7

מהאינטגרל $\int 4x^3 dx = x^4 + C$ ומטענה 12.4 נסיק:

$$\int 8x^3 dx = \int 2 \cdot 4x^3 dx = 2 \int 4x^3 dx = 2x^4 + C \quad \text{א.}$$

$$\int -4x^3 dx = \int (-1) \cdot 4x^3 dx = (-1) \cdot \int 4x^3 dx = -x^4 + C \quad \text{ב.}$$

$$\int x^3 dx = \int \frac{1}{4} \cdot 4x^3 dx = \frac{1}{4} \int 4x^3 dx = \frac{1}{4} x^4 + C = \frac{x^4}{4} + C \quad \text{ג.}$$

השאלה בעמוד 141

תשובה 8

$$\int (x^5 - 1) dx = \int x^5 dx - \int 1 dx = \frac{x^6}{6} - x + C \quad \text{א.}$$

$$\int (8 - x) dx = 8 \int 1 dx - \int x dx = 8x - \frac{x^2}{2} + C \quad \text{ב.}$$

$$\int 0 dx = \int 0 \cdot 1 dx = 0 \cdot \int 1 dx = 0 \cdot x + C = C \quad \text{ג.}$$

ניתן לנמק חישוב זה גם כך: לפי משפט 11.8, הפונקציות הקדומות היחידות של פונקציית האפס הן הפונקציות הקבועות.

$$\begin{aligned} \int (x^2 + 8x + 7) dx &= \int x^2 dx + 8 \int x dx + \int 7 dx = \frac{x^3}{3} + 8 \frac{x^2}{2} + 7x + C \\ &= \frac{x^3}{3} + 4x^2 + 7x + C \end{aligned} \quad \text{ד.}$$

$$\int (x^{50} + x^2 - 8)dx = \int x^{50}dx + \int x^2dx - 8 \int 1dx = \frac{x^{51}}{51} + \frac{x^3}{3} - 8x + C \quad \text{ה.}$$

ו. נפשט תחילה, לפי נוסחאות הכפל המקוצר:

$$(x+2)^3 = x^3 + 3x^2 \cdot 2 + 3x \cdot 2^2 + 2^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$

$$\begin{aligned} \int (x+2)^3 dx &= \int (x^3 + 6x^2 + 12x + 8) \\ &= \frac{x^4}{4} + 6 \cdot \frac{x^3}{3} + 12 \cdot \frac{x^2}{2} + 8x + C \\ &= \frac{x^4}{4} + 2x^3 + 6x^2 + 8x + C \end{aligned} \quad \text{לכן:}$$

ז. נפשט תחילה, לפי נוסחת הכפל המקוצר $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$:

$$\frac{x^3 - 1}{x - 1} = \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} = x^2 + x + 1$$

$$\int \frac{x^3 - 1}{x - 1} dx = \int (x^2 + x + 1) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + C \quad \text{לכן:}$$

ח. נפתח סוגריים: $(x+1)(x+3) = x^2 + x + 3x + 3 = x^2 + 4x + 3$

$$\int (x+1)(x+3) dx = \int (x^2 + 4x + 3) dx = \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 3x + C \quad \text{לכן}$$

הערה: בכל חישוב של אינטגרל לא מסוים, מומלץ לגזור את התוצאה כדי לוודא שקיבלנו פונקציה קדומה. נגזור, לדוגמה, את התוצאות בסעיפים ד,ה:

$$\left(\frac{x^3}{3} + 4x^2 + 7x \right)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 + 4 \cdot 2x + 7 = x^2 + 8x + 7$$

$$\left(\frac{x^{51}}{51} + \frac{x^3}{3} - 8x \right)' = \frac{1}{51} \cdot 51x^{50} + \frac{1}{3} \cdot 3x^2 - 8 = x^{50} + x^2 - 8$$

השאלה בעמוד 142

תשובה 9

$$\int \frac{1}{x^5} dx = \int x^{-5} dx = \frac{1}{(-5)+1} x^{(-5)+1} + C = \frac{1}{-4} x^{-4} + C = \frac{-1}{4x^4} + C \quad \text{א.}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx &= \int x^{-1/2} dx = \frac{1}{(-1/2)+1} x^{(-1/2)+1} + C \\ &= \frac{1}{1/2} x^{1/2} + C = 2\sqrt{x} + C \end{aligned} \quad \text{ב.}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{-2\sqrt{x} + 5}{x^2} dx &= \int \left(\frac{-2x^{1/2}}{x^2} + \frac{5}{x^2} \right) dx = \int (-2x^{-1.5} + 5x^{-2}) dx \\ &= -2 \int x^{-1.5} dx + 5 \int x^{-2} dx = \frac{-2}{-0.5} x^{-0.5} + 5 \cdot \frac{1}{-1} x^{-1} + C \\ &= \frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{5}{x} + C \end{aligned} \quad \text{ג.}$$

השאלה בעמוד 143

תשובה 10

$$\int (\sin x + \cos x) dx = \int \sin x dx + \int \cos x dx = (-\cos x) + \sin x + C \\ = \sin x - \cos x + C \quad \text{א.}$$

$$\int \frac{2}{\cos^2 x} dx = 2 \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = 2 \tan x + C \quad \text{ב.}$$

$$\int 3^x dx = \frac{3^x}{\ln 3} + C \quad \text{ג. לפי נוסחת האינטגרציה של } a^x :$$

$$5^{2x+1} = 5^{2x} \cdot 5^1 = (5^2)^x \cdot 5 = 5 \cdot 25^x, \quad \text{ד. לפי חוקי החזקות,}$$

$$\int 5^{2x+1} dx = \int 5 \cdot 25^x dx = 5 \cdot \frac{25^x}{\ln 25} + C = \frac{5^{2x+1}}{\ln(5^2)} + C = \frac{5^{2x+1}}{2 \ln 5} + C \quad \text{לכן:}$$

$$\int \left(x + \frac{1}{x}\right) dx = \int x dx + \int \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} + \ln|x| + C \quad \text{ה.}$$

$$\int \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 dx = \int \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right) dx = x + 2 \ln|x| + \int \frac{1}{x^2} dx \quad \text{ו.}$$

$$\int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = \frac{1}{(-2)+1} x^{(-2)+1} + C = \frac{-1}{x} + C \quad \text{נחשב בנפרד:}$$

$$\int \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 dx = x + 2 \ln|x| - \frac{1}{x} + C \quad \text{לכן}$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \text{ז. ניעזר בזהות הטריגונומטרית הבאה:}$$

$$\int \tan^2 x dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx = \tan x - x + C \quad \text{ממנה נקבל}$$

השאלה בעמוד 145

תשובה 11

$$\text{א. כדי לחשב את האינטגרל } \int \sin(x^2) \cdot 2x dx, \text{ נציג:}$$

$$\sin(x^2) \cdot 2x = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$f(x) = \sin x, g(x) = x^2 \quad \text{עם הפונקציות}$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C \quad \text{נמצא פונקציה קדומה של } f :$$

$$F(x) = -\cos x \quad \text{לכן הפונקציה הבאה היא פונקציה קדומה של } f :$$

לפי כלל ההצבה,

$$\int \sin(x^2) \cdot 2x dx = \int f(g(x)) g'(x) dx = F(g(x)) + C = -\cos(x^2) + C$$

$$(-\cos(x^2))' = -(-\sin(x^2) \cdot 2x) = \sin(x^2) \cdot 2x \quad \text{נגזור ונודא:}$$

ב. כדי לחשב את האינטגרל $\int e^x \sin(e^x) dx$ נציג:

$$e^x \sin(e^x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$f(x) = \sin x, g(x) = e^x$$

עם הפונקציות

כפי שראינו בסעיף הקודם, $F(x) = -\cos x$ היא פונקציה קדומה של f .

לפי כלל ההצבה,

$$\int e^x \sin(e^x) dx = \int f(g(x)) g'(x) dx = F(g(x)) + C = -\cos(e^x) + C$$

$$(-\cos(e^x))' = -(-\sin(e^x) \cdot e^x) = e^x \sin(e^x) \quad \text{נגזור ונוודא:}$$

בסעיפים הבאים נקצר את הצגת תהליך הפתרון.

$$f(x) = e^x, g(x) = x^2 \quad \triangleleft$$

$$F(x) = e^x$$

$$\int e^{x^2} \cdot (2x) dx = \int e^{x^2} \cdot (x^2)' dx = e^{x^2} + C \quad \text{ג. לפי כלל ההצבה:}$$

$$\int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int 2x e^{x^2} dx = \frac{e^{x^2}}{2} + C \quad \text{לכן,}$$

$$f(x) = \sin x, g(x) = 3x \quad \triangleleft$$

$$F(x) = -\cos x$$

$$\int 3 \sin(3x) dx = \int \sin(3x) \cdot (3x)' dx = -\cos(3x) + C \quad \text{ד.}$$

$$f(x) = e^x, g(x) = \sqrt{x} \quad \triangleleft$$

$$F(x) = e^x$$

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int 2 \cdot \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} dx = 2 \int e^{\sqrt{x}} \cdot (\sqrt{x})' dx = 2e^{\sqrt{x}} + C \quad \text{ה.}$$

$$f(x) = x^3, g(x) = 1 + x^2 \quad \triangleleft$$

$$F(x) = x^4/4$$

$$\int (1 + x^2)^3 \cdot 2x dx = \int (1 + x^2)^3 \cdot (1 + x^2)' dx = \frac{(1 + x^2)^4}{4} + C \quad \text{ו.}$$

השאלה בעמוד 147

תשובה 12

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

א. מהאינטגרל הידוע

נקבל (לפי כלל ההצבה הלינארית):

$$\int \cos 4x dx = \frac{1}{4} (\sin 4x) + C = \frac{\sin 4x}{4} + C$$

$$\left(\frac{\sin 4x}{4} \right)' = \frac{1}{4} (\cos 4x) \cdot 4 = \cos 4x \quad \text{נגזור ונוודא:}$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

ב. מהאינטגרל

$$\int \frac{1}{1-x} dx = \frac{1}{-1} \ln|1-x| + C = -\ln|1-x| + C \quad \text{נקבל:}$$

$$\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C$$

ג. מהאינטגרל

$$\int \tan x dx = -\frac{1}{8} \ln|\cos 8x| + C \quad \text{נקבל:}$$

$$\int x^{10} dx = \frac{x^{11}}{11} + C$$

ד. מהאינטגרל

$$\int (7x+1)^{10} dx = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{11} (7x+1)^{11} = \frac{(7x+1)^{11}}{77} \quad \text{נקבל:}$$

$$\int \sqrt{x} dx = \int x^{0.5} dx = \frac{1}{1.5} x^{1.5} = \frac{2}{3} x^{1.5} \quad \text{ה. מהאינטגרל}$$

$$\int \sqrt{x+1} dx = \frac{1}{1.5} \cdot \frac{2}{3} (x+1)^{1.5} + C = \frac{2}{3} (x+1) \sqrt{1+x} + C \quad \text{נקבל:}$$

$$\int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = \frac{1}{-1} x^{-1} + C = \frac{-1}{x} + C \quad \text{ו. מהאינטגרל}$$

$$\int \frac{1}{(5x+1)^2} dx = \frac{1}{5} \cdot \frac{-1}{5x+1} + C = \frac{-1}{25x+5} + C \quad \text{נקבל:}$$

השאלה בעמוד 148

תשובה 13

א. נחשב את האינטגרל $\int x \cos x dx$ באינטגרציה בחלקים, עם $f(x) = x$, $g(x) = \sin x$ (נבחרה כפונקציה קדומה של $\cos x$):

$$\begin{aligned} \int x \cos x dx &= \int f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) dx \\ &= x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x - (-\cos x) + C \\ &= x \sin x + \cos x + C \end{aligned}$$

$$(x \sin x + \cos x)' = 1 \cdot \sin x + x \cos x - \sin x = x \cos x \quad \text{נגזור ונוודא:}$$

$$\begin{aligned} \int x e^x dx &= \int x (e^x)' dx = x e^x - \int (x)' e^x dx = x e^x - \int e^x dx \\ &= x e^x - e^x + C \end{aligned} \quad \text{ב.}$$

$$\int \sin(2x) dx = \frac{-1}{2} \cos 2x + C \quad \text{ג. נחשב תחילה, לפי כלל ההצבה הלינארית:}$$

כעת נבצע אינטגרציה בחלקים:

$$\begin{aligned} \int x \sin(2x) dx &= \int x \left(\frac{-1}{2} \cos 2x \right)' dx = x \left(\frac{-1}{2} \cos 2x \right) - \int 1 \left(\frac{-1}{2} \cos 2x \right) dx \\ &= \frac{-x \cos 2x}{2} + \frac{1}{2} \int \cos(2x) dx \end{aligned}$$

$$\int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin(2x) + C \quad \text{לפי כלל ההצבה הלינארית,}$$

$$\int x \sin(2x) dx = \frac{-x \cos 2x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C \quad \text{לכן}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{-x \cos 2x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} \right)' &= \frac{-1}{2} (x \cos 2x)' + \frac{1}{4} (\sin 2x)' \\ &= \frac{-1}{2} (\cos 2x + x(-\sin 2x) \cdot 2) + \frac{\cos 2x}{2} \\ &= x \sin 2x \end{aligned} \quad \text{נגזור ונוודא:}$$

ד. נבצע אינטגרציה בחלקים:

$$\begin{aligned}\int x^2 \sin x dx &= \int x^2 (-\cos x)' dx = -x^2 \cos x - \int (x^2)' (-\cos x) dx \\ &= -x^2 \cos x + \int 2x \cos x dx = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x dx\end{aligned}$$

$$\int x \cos x dx = x \sin x + \cos x + C \quad \text{ניעזר בתוצאת סעיף א:}$$

$$\begin{aligned}\int x^2 \sin x dx &= -x^2 \cos x + 2(x \sin x + \cos x) + C \\ &= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x)' & \quad \text{נגזור ונוודא:} \\ &= -2x \cos x + x^2 \sin x + 2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x \\ &= x^2 \sin x\end{aligned}$$

השאלה בעמוד 150

תשובה 14

$$\int (x^3 - 5x^2 + 7x + 1) dx = \frac{x^4}{4} - 5 \frac{x^3}{3} + 7 \frac{x^2}{2} + x + C \quad \text{א.}$$

$$\int e^{-x} dx = -e^{-x} + C \quad \text{ב. לפי כלל ההצבה הלינארית:}$$

$$\int \frac{\ln^2 x}{x} dx = \int \ln^2 x \cdot (\ln x)' dx = \frac{\ln^3 x}{3} + C \quad \text{ג. לפי כלל ההצבה:}$$

$$\int \tan(5x) dx = \frac{-1}{5} \ln |\cos 5x| + C \quad \text{ד. לפי כלל ההצבה הלינארית:}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{2 \sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx &= 4 \int \frac{\sin \sqrt{x}}{2 \sqrt{x}} dx = 4 \int (\sin \sqrt{x}) (\sqrt{x})' dx = -4 \cos \sqrt{x} + C \\ & \quad \text{ה. לפי כלל ההצבה:}\end{aligned}$$

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \quad \text{ו. לפי חוק שינוי הבסיס בלוגריתם:}$$

$$\int (\log_a x) dx = \frac{1}{\ln a} (x \ln x - x) + C = x \log_a x - \frac{x}{\ln a} + C \quad \text{לכן,}$$

$$\begin{aligned}\int x^7 (1-x^8)^8 dx &= -\frac{1}{8} \int (1-x^8)^8 \cdot (-8x^7) dx = -\frac{1}{8} \int (1-x^8)^8 (1-x^8)' dx \\ &= -\frac{1}{8} \cdot \frac{(1-x^8)^9}{9} + C = -\frac{(1-x^8)^9}{72} + C\end{aligned}$$

$$\frac{x+2}{x-2} = \frac{x-2+4}{x-2} = \frac{x-2}{x-2} + \frac{4}{x-2} = 1 + \frac{4}{x-2} \quad \text{ח. נציג תחילה:}$$

$$\int \frac{x+2}{x-2} dx = \int \left(1 + \frac{4}{x-2}\right) dx = \int 1 dx + 4 \int \frac{1}{x-2} dx \quad \text{לכן,}$$

$$= x + 4 \ln |x-2| + C \quad \text{לפי כלל ההצבה הלינארית:}$$

השאלה בעמוד 151

תשובה 15

א. השטח מתחת לעקום $y = 2^x$ בקטע $[0, 3]$ הוא: $\int_0^3 2^x dx$

לצורך חישובו, נחשב את האינטגרל הלא מסוים: $\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2}$

לפיכך: $\int_0^3 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} \Big|_0^3 = \frac{2^3}{\ln 2} - \frac{2^0}{\ln 2} = \frac{8-1}{\ln 2} = \frac{7}{\ln 2} \approx 10.1$

ב. נחשב תחילה: $\int (x^6 + 12x^2) dx = \frac{x^7}{7} + 12 \frac{x^3}{3} + C = \frac{x^7}{7} + 4x^3 + C$

לכן $\int_{-1}^1 (x^6 + 12x^2) dx = \frac{x^7}{7} + 4x^3 \Big|_{-1}^1 = \left(\frac{1^7}{7} + 4 \cdot 1^3 \right) - \left(\frac{(-1)^7}{7} + 4 \cdot (-1)^3 \right) = \left(4\frac{1}{7} \right) - \left(-4\frac{1}{7} \right) = 8\frac{2}{7}$

ג. $\int_1^e \ln x dx = (x \ln x - x) \Big|_1^e = (e \ln e - e) - (1 \cdot \ln 1 - 1) = (e - e) - (0 - 1) = 1$. $\ln e = 1, \ln 1 = 0$ <

ד. נחשב תחילה: $\int \sqrt{x} dx = \int x^{0.5} dx = \frac{1}{1.5} x^{1.5} = \frac{2}{3} x \sqrt{x}$

לכן $\int_1^4 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x \sqrt{x} \Big|_1^4 = \frac{2}{3} 4\sqrt{4} - \frac{2}{3} 1 \cdot \sqrt{1} = \frac{2}{3} (8 - 1) = \frac{14}{3}$

השאלה בעמוד 154

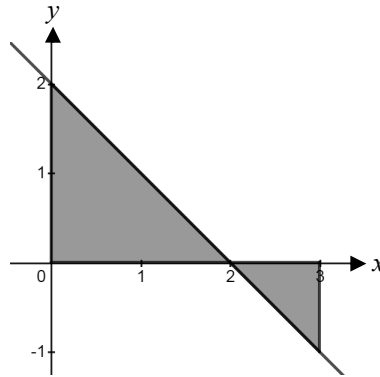
תשובה 16

נתון: $f(x) = 2 - x$.

א. $\int_0^3 f(x) dx = \int_0^3 (2 - x) dx = \left(2x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^3 = \left(2 \cdot 3 - \frac{9}{2} \right) - \left(2 \cdot 0 - \frac{0}{2} \right) = 6 - 4.5 = 1.5$

ב. לכל $x \leq 2$ מתקיים $2 - x \geq 0$, ולכל $x \geq 2$ מתקיים $2 - x \leq 0$. גרף הפונקציה בקטע $[0, 2]$ נמצא מעל ציר ה- x (או עליו), וגרף הפונקציה בקטע $[2, 3]$ נמצא מתחת לציר ה- x (או עליו).

ג. נתבונן בגרף הפונקציה f בקטע $[0, 3]$:



החלק שמעל ציר ה- x הוא משולש ישר-זווית שאורכי שני ניצביו הם 2. שטח משולש זה הוא $(2 \times 2)/2 = 2$.

ד. החלק שמתחת ציר ה- x הוא משולש ישר-זווית שאורכי שני ניצביו הם 1. שטח משולש זה הוא $(1 \times 1)/2 = 1/2$.

ה. הפרש השטחים שמעל ומתחת ציר ה- x הוא: $2 - \frac{1}{2} = 1.5$

אכן, תוצאה זו שווה לאינטגרל $\int_0^3 f(x) dx$ שחושב בסעיף א.

השאלה בעמוד 154

תשובה 17

א. לכל $x \leq 0$ מתקיים $|x| = -x$. לכן,

$$\int_{-2}^0 |x| dx = \int_{-2}^0 (-x) dx = \left(-\frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-2}^0 = -\frac{0^2}{2} - \left(-\frac{(-2)^2}{2} \right) = 0 - (-2) = 2$$

$$\int_0^1 |x| dx = \int_0^1 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{לכל } x \geq 0 \text{ מתקיים } |x| = x \text{ לכן}$$

$$\int_{-2}^1 |x| dx = \int_{-2}^0 |x| dx + \int_0^1 |x| dx = 2 + \frac{1}{2} = 2\frac{1}{2} \quad \text{בסך הכול נקבל}$$

ב. תחילה נמצא את התחום שבו $2 - 3x$ חיובי:

$$2 - 3x > 0 \Leftrightarrow 3x < 2 \Leftrightarrow x < \frac{2}{3}$$

לכן, עבור $x \leq 2/3$ מתקיים $2 - 3x \geq 0$, ומכאן $|2 - 3x| = 2 - 3x$.

כמו כן, עבור $x \geq 2/3$ מתקיים $2 - 3x \leq 0$, ומכאן $|2 - 3x| = -(2 - 3x) = 3x - 2$.

נעבור לחישוב האינטגרל:

$$\begin{aligned}\int_0^1 |2-3x| dx &= \int_0^{2/3} |2-3x| dx + \int_{2/3}^1 |2-3x| dx \\ &= \int_0^{2/3} (2-3x) dx + \int_{2/3}^1 (3x-2) dx \\ &= \left(2x - \frac{3}{2}x^2\right) \Big|_0^{2/3} + \left(\frac{3}{2}x^2 - 2x\right) \Big|_{2/3}^1 \\ &= \left(2 \cdot \frac{2}{3} - \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{9} - 0\right) + \left(\frac{3}{2} \cdot 1 - 2 \cdot 1 - \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{9} - 2 \cdot \frac{2}{3}\right)\right) \\ &= \frac{2}{3} + \left(-\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right) = \frac{5}{6}\end{aligned}$$

השאלה בעמוד 156

תשובה 18

קצב מילוי המים במאגר בזמן t (הנמדד בימים) הוא $2t$ ליטרים ליום (יום הוא 24 שעות, כלומר יממה).

בפרק זמן קצר המתחיל בזמן t ואורכו Δt נצברים $2t\Delta t$ ליטרים של מים. לכן עד לזמן t_0 מסוים, כמות המים הנצברת היא

$$\int_0^{t_0} 2t dt = t^2 \Big|_0^{t_0} = t_0^2 - 0^2 = t_0^2$$

הזמן t_0 שבו ייצברו 1000 ליטרים מקיים, אפוא:

$$\begin{aligned}t_0^2 &= 1000 \\ \Rightarrow t_0 &= \sqrt{1000} \approx 31.62\end{aligned}$$

הזמן שיעבור עד למילוי 1000 ליטרים הוא כ-31.62 יממות, שהן כ-31 יממות ו-15 שעות.

השאלה בעמוד 156

תשובה 19

נסמן את מהירות המכונית בזמן t (הנמדד בשניות, החל מרגע הבלימה) ב- $v(t)$. נתון כי המהירות ההתחלתית היא 60 קמ"ש. נבטא נתון זה במטרים לשנייה:

$$\frac{60 \cdot 1000}{3600} = \frac{100}{6} \approx 16.67$$

כלומר, $v(0) = 50/3$.

נתון גם ש- $v(2) = 0$ וש- v היא פונקציה לינארית. מנתונים אלה נובע:

$$v(t) = \frac{50}{3} - \frac{50}{6}t = \frac{50}{3} - \frac{25}{3}t$$

בפרק זמן קצר המתחיל בזמן t , שאורכו Δt , המכונית עוברת כ- $v(t) \cdot \Delta t$ מטרים.

◁ ניתן למצוא נוסחה זו כך:
 $t = 0$; מההצבות $v(t) = at + b$
 ר- $t = 2$ נקבל משוואות בנעלמים
 a, b .

לכן המרחק הכולל שתעבור המכונית עד לרגע העצירה ($t = 2$) הוא

$$\begin{aligned}\int_0^2 v(t) dt &= \int_0^2 \left(\frac{50}{3} - \frac{25}{3}t \right) dt = \left(\frac{50}{3}t - \frac{25}{3 \cdot 2}t^2 \right) \Big|_0^2 \\ &= \left(\frac{50}{3} \cdot 2 - \frac{25}{6} \cdot 4 \right) - 0 = \frac{100}{6} \approx 16.67\end{aligned}$$

המכונית תעבור כ־ 16.67 מטרים עד לעצירה.

השאלה בעמוד 159

תשובה 20

א. לכל $0 \leq x \leq 1$ מתקיים $x^3 = x \cdot x^2 \leq 1 \cdot x^2 = x^2$

לכן השטח בין הגרפים $y = x^3$ ו־ $y = x^2$ בקטע זה הוא

$$\int_0^1 (x^2 - x^3) dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^1 = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) - 0 = \frac{1}{12}$$

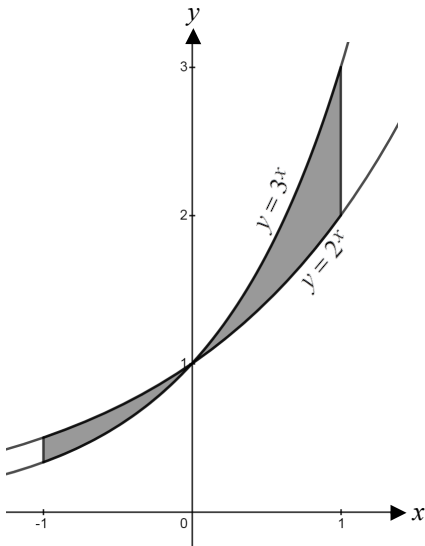
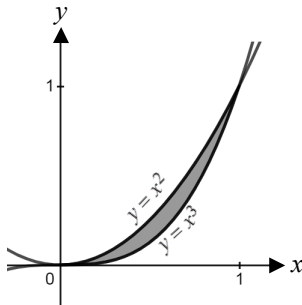
ב. נבדוק מתי מתקיים $3^x > 2^x$:

$$3^x > 2^x \Leftrightarrow \frac{3^x}{2^x} > 1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2} \right)^x > \left(\frac{3}{2} \right)^0 \Leftrightarrow x > 0$$

לכן עבור $x \in [0, 1]$ מתקיים $3^x \geq 2^x$, ועבור $x \in [-1, 1]$ מתקיים $3^x \leq 2^x$.

השטח בין הגרפים $y = 3^x$ ו־ $y = 2^x$ בקטע $[-1, 1]$ הוא:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 |3^x - 2^x| dx &= \int_{-1}^0 (2^x - 3^x) dx + \int_0^1 (3^x - 2^x) dx \\ &= \left(\frac{2^x}{\ln 2} - \frac{3^x}{\ln 3} \right) \Big|_{-1}^0 + \left(\frac{3^x}{\ln 3} - \frac{2^x}{\ln 2} \right) \Big|_0^1 \\ &= \left(\frac{2^0}{\ln 2} - \frac{3^0}{\ln 3} \right) - \left(\frac{2^{-1}}{\ln 2} - \frac{3^{-1}}{\ln 3} \right) \\ &\quad + \left(\frac{3^1}{\ln 3} - \frac{2^1}{\ln 2} \right) - \left(\frac{3^0}{\ln 3} - \frac{2^0}{\ln 2} \right) \\ &= \frac{2^0 - 2^{-1} - 2^1 + 2^0}{\ln 2} + \frac{-3^0 + 3^{-1} + 3^1 - 3^0}{\ln 3} \\ &= \frac{4}{3 \ln 3} - \frac{1}{2 \ln 2} \approx 0.492\end{aligned}$$



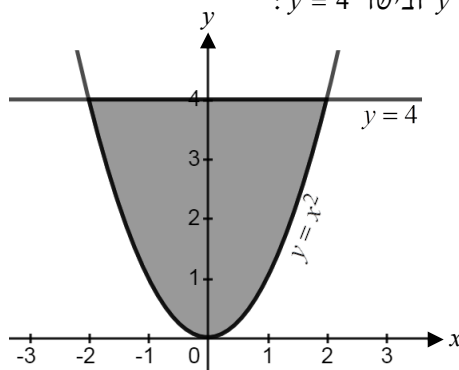
ג. השטח בין הגרפים $y = \sin x$ ו- $y = -\sin x$ בקטע $[0, 2\pi]$ הוא:

$$S = \int_0^{2\pi} |\sin x - (-\sin x)| dx = \int_0^{2\pi} |2\sin x| dx$$

עבור $x \in [0, \pi]$ מתקיים $\sin x \geq 0$, ועבור $x \in [\pi, 2\pi]$ מתקיים $\sin x \leq 0$. לכן

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\pi} 2\sin x dx + \int_{\pi}^{2\pi} (-2\sin x) dx = (-2\cos x)\Big|_0^{\pi} + (2\cos x)\Big|_{\pi}^{2\pi} \\ &= (-2)(\cos \pi - \cos 0) + 2(\cos 2\pi - \cos \pi) = (-2)(-2) + 2 \cdot 2 = 8 \end{aligned}$$

ד. נתבונן בפרבולה $y = x^2$ ובירש $y = 4$:



השטח התחום בין שתי הצורות הוא האזור שבין שני הגרפים בקטע $[-2, 2]$.
בקטע זה מתקיים $|x| \leq 2$ ולכן $x^2 \leq 4$. השטח המבוקש הוא:

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx &= \left(4x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-2}^2 = \left(4 \cdot 2 - \frac{8}{3} \right) - \left(4 \cdot (-2) - \frac{-8}{3} \right) \\ &= \frac{16}{3} - \left(-\frac{16}{3} \right) = \frac{32}{3} \approx 10.67 \end{aligned}$$

השאלה בעמוד 160

תשובה 21

א. הקשר בין מושג האינטגרל למושג הנגזרת מבוטא במשפט היסודי של החשבון

האינפיניטסימלי (משפט 12.1), ולפיו, עבור פונקציה f המוגדרת ורציפה בקטע $[a, b]$,

$$S'(x) = f(x) \text{ מקיימת: } S(x) = \int_a^b f(t) dt$$

ב. בהינתן פונקציה f המוגדרת ורציפה בקטע $[a, b]$, השטח הכלוא מתחת לגרף

$$\int_a^b f(x) dx \quad \text{הפונקציה בקטע זה הוא האינטגרל המסוים}$$

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad \text{נמצא פונקציה קדומה של } f:$$

לפי הנוסחה היסודית של החשבון האינפיניטסימלי (משפט 12.3), השטח הוא

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b$$

- ג. לכל פונקציה רציפה f בקטע $[a, b]$ יש פונקציות קדומות רבות: לפי המשפט היסודי של החשבון האינפיניטסימלי, הפונקציה $S(x) = \int_a^b f(t)dt$ היא פונקציה קדומה של f . לפי משפט 12.2, כל פונקציה מהצורה $S(x) + C$ (עבור C מספר ממשי קבוע) היא פונקציה קדומה של f בקטע, ואלה הן כל הפונקציות הקדומות שלה בקטע.
- ד. האינטגרל המסוים, $\int_a^b f(t)dt$, הוא מספר המבטא, עבור פונקציה אי־שלילית, את השטח שבין גרף הפונקציה לציר ה־ x . במקרה הכללי מספר זה מבטא את הפרש השטחים שמעל ומתחת לציר ה־ x , הכלואים בין גרף הפונקציה לציר ה־ x .
- האינטגרל הלא מסוים, $\int f(x)dx$, מבטא את משפחת הפונקציות הקדומות של הפונקציה f בקטע הנתון.
- הקשר בין שני המושגים מתבטא בנוסחה היסודית של החשבון האינפיניטסימלי, המאפשרת לחשב את האינטגרל המסוים בהינתן האינטגרל הלא מסוים, כמפורט בסעיף ב.

השאלה בעמוד 161

תשובה 22

$$\int (2x + 8) dx = 2 \int x dx + 8 \int 1 dx = 2 \cdot \frac{x^2}{2} + 8x + C = x^2 + 8x + C \quad \text{א.}$$

$$\int (5x^7 - x^2 - 2) dx = 5 \int x^7 dx - \int x^2 dx - 2 \int 1 dx = \frac{5x^8}{8} - \frac{x^3}{3} - 2x + C \quad \text{ב.}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 + x + 3}{x^2} dx &= \int \left(x + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} \right) dx = \int \left(x + \frac{1}{x} + 3x^{-2} \right) dx \\ &= \frac{x^2}{2} + \ln|x| + \frac{3}{-1} x^{-1} + C = \frac{x^2}{2} + \ln|x| - \frac{3}{x} + C \quad \text{ג.} \end{aligned}$$

ד. לפי כלל ההצבה הלינארית:

$$\int (8x + 1)^7 dx = \frac{1}{8} \frac{(8x + 1)^8}{8} + C = \frac{(8x + 1)^8}{64} + C$$

$$\int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int e^{x^2} \cdot 2x dx = \frac{1}{2} \int e^{x^2} (x^2)' dx = \frac{e^{x^2}}{2} + C \quad \text{ה. לפי כלל ההצבה:}$$

ו. נבצע אינטגרציה בחלקים:

$$\int x^2 e^x dx = \int x^2 (e^x)' dx = x^2 e^x - \int 2x e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx$$

לחישוב האינטגרל $\int x e^x dx$ נבצע שוב אינטגרציה בחלקים:

$$\int x e^x dx = \int x (e^x)' dx = x e^x - \int 1 \cdot e^x = x e^x - e^x$$

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2(x e^x - e^x) = e^x (x^2 - 2x + 2) + C \quad \text{בסך הכול נקבל:}$$

ז. נגדיר: $a = 7/8$. לפי כלל האינטגרציה של הפונקציה $f(x) = a^x$:

$$\begin{aligned}\int \frac{7^x}{8^x} dx &= \int \left(\frac{7}{8}\right)^x dx = \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \\ &= \frac{(7/8)^x}{\ln(7/8)} + C = \frac{7^x}{8^x (\ln 7 - \ln 8)} + C\end{aligned}$$

ח. תחילה, נחשב: $\int x^{-2} dx = \frac{1}{-1} x^{-1} + C = \frac{-1}{x} + C$

לפי כלל ההצבה: $\int \frac{1}{x \ln^2 x} dx = \int (\ln x)^{-2} (\ln x)' dx = \frac{-1}{\ln x} + C$

ט. לפי חוקי הלוגריתמים, $\ln \sqrt{x} = \ln(x^{1/2}) = \frac{1}{2} \ln x$

לכן $\int \ln \sqrt{x} dx = \frac{1}{2} \int \ln x dx = \frac{1}{2} (x \ln x - x) + C$

י. לפי כלל ההצבה הלינארית,

$$\int \sin(2x+1) dx = \frac{1}{2} (-\cos(2x+1)) + C = \frac{-\cos(2x+1)}{2} + C$$

יא. לפי הזהות הטריגונומטרית של מכפלת סינוסים,

$$\sin 2x \sin 3x = \frac{\cos(2x-3x) - \cos(2x+3x)}{2} = \frac{1}{2} (\cos x - \cos 5x)$$

נחשב את האינטגרל, לפי כלל ההצבה הלינארית:

$$\begin{aligned}\int \sin 2x \sin 3x dx &= \frac{1}{2} \int \cos x dx - \frac{1}{2} \int \cos 5x dx \\ &= \frac{\sin x}{2} - \frac{1}{2} \frac{\sin 5x}{5} + C = \frac{\sin x}{2} - \frac{\sin 5x}{10} + C\end{aligned}$$

יב. לפי כלל ההצבה: $\int \tan^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \tan^2 x (\tan x)' dx = \frac{\tan^3 x}{3} + C$

השאלה בעמוד 161

תשובה 23

א.
$$\begin{aligned}\int_1^2 (x^2 + 5x - 7) dx &= \left(\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 7x \right) \Big|_1^2 \\ &= \left(\frac{8}{3} + \frac{5 \cdot 4}{2} - 7 \cdot 2 \right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{5 \cdot 1}{2} - 7 \cdot 1 \right) \\ &= \frac{-4}{3} - \frac{-25}{6} = \frac{17}{6} \approx 2.83\end{aligned}$$

ב. לפי נוסחת ההצבה הלינארית:

$$\int_1^{10} \frac{1}{8x-1} dx = \frac{\ln|8x-1|}{8} \Big|_1^{10} = \frac{\ln 79}{8} - \frac{\ln 7}{8} = \frac{\ln(79/7)}{8} \approx 0.303$$

ג. לכל $1 \leq x \leq \sqrt{5}$ מתקיים $x^2 \leq 5$, ולכן $x^2 - 5 \leq 0$. מכאן,

$$\begin{aligned}\int_1^{\sqrt{5}} |x^2 - 5| dx &= \int_1^{\sqrt{5}} (-(x^2 - 5)) dx = \int_1^{\sqrt{5}} (5 - x^2) dx = \left(5x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_1^{\sqrt{5}} \\ &= \left(5\sqrt{5} - \frac{5\sqrt{5}}{3} \right) - \left(5 \cdot 1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{10\sqrt{5} - 14}{3}\end{aligned}$$

לכל $\sqrt{5} \leq x \leq 3$ מתקיים $x^2 \geq 5$, ולכן $x^2 - 5 \geq 0$. מכאן,

$$\begin{aligned}\int_{\sqrt{5}}^3 |x^2 - 5| dx &= \int_{\sqrt{5}}^3 (x^2 - 5) dx = \left(\frac{x^3}{3} - 5x \right) \Big|_{\sqrt{5}}^3 \\ &= \left(\frac{27}{3} - 15 \right) - \left(\frac{5\sqrt{5}}{3} - 5\sqrt{5} \right) = \frac{10\sqrt{5} - 18}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_1^3 |x^2 - 5| dx &= \int_1^{\sqrt{5}} |x^2 - 5| dx + \int_{\sqrt{5}}^3 |x^2 - 5| dx \quad \text{בסך הכול נקבל:} \\ &= \frac{10\sqrt{5} - 14}{3} + \frac{10\sqrt{5} - 18}{3} = \frac{20\sqrt{5} - 32}{3} \approx 4.24\end{aligned}$$

ד. נשים לב ש- $\pi < 5 < 2\pi$.

לכל $0 \leq x \leq \pi$ מתקיים $\sin x \geq 0$, ולכן

$$\int_0^{\pi} |\sin x| dx = \int_0^{\pi} \sin x dx = (-\cos x) \Big|_0^{\pi} = (-\cos \pi) - (-\cos 0) = 1 + 1 = 2$$

לכל $\pi \leq x \leq 5$ מתקיים $\sin x \leq 0$, ולכן

$$\begin{aligned}\int_{\pi}^5 |\sin x| dx &= \int_{\pi}^5 (-\sin x) dx = \cos x \Big|_{\pi}^5 = \cos 5 - \cos \pi = \cos 5 + 1 \\ \int_0^5 |\sin x| dx &= \int_0^{\pi} |\sin x| dx + \int_{\pi}^5 |\sin x| dx = 2 + \cos 5 \approx 3.28 \quad \text{בסך הכול נקבל:}\end{aligned}$$

השאלה בעמוד 161

תשובה 24

נתונה הפונקציה: $f(x) = x^{-2} = 1/x^2$ בקטע $[1, 2]$.

נקרב את האינטגרל $\int_1^2 f(x) dx$ על ידי חלוקת הקטע לארבעה חלקים:

אורך הקטע הוא $2 - 1 = 1$, לכן אורך כל חלק הוא $\Delta x = \frac{1}{4}$

נקודות החלוקה הן: $x_0 = 1, x_1 = 1.25, x_2 = 1.5, x_3 = 1.75, x_4 = 2$

סכום שטחי המלבנים הוא:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^3 f(x_i) \cdot \Delta x &= (f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)) \cdot \frac{1}{4} \\ &= \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{1.25^2} + \frac{1}{1.5^2} + \frac{1}{1.75^2} \right) \cdot \frac{1}{4} \approx 0.603\end{aligned}$$

לשם השוואה, נחשב את האינטגרל $\int_1^2 f(x)dx$:

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_1^2 = \left(-\frac{1}{2} \right) - \left(-1 \right) = \frac{1}{2}$$

השאלה בעמוד 161

תשובה 25

א. לכל $0 \leq x \leq 1$ מתקיים $x^2 \leq 1$, ולכן: $x^3 = x \cdot x^2 \leq x$

$$\int_0^1 |x - x^3| dx = \int_0^1 (x - x^3) dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) - 0 = \frac{1}{4}, \text{ לכן,}$$

לכל $-1 \leq x \leq 0$ מתקיים $0 \leq (-x) \leq 1$, ולכן, לפי האי-שוויון שהוכחנו קודם,

$$(-x)^3 \leq (-x) \Rightarrow -x^3 \leq -x \Rightarrow x \leq x^3$$

$$\int_{-1}^0 |x - x^3| dx = \int_{-1}^0 (-(x - x^3)) dx = \int_{-1}^0 (x^3 - x) dx, \text{ לכן,}$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-1}^0 = 0 - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4}$$

השטח שבין הגרפים של הפונקציות $f(x) = x$, $g(x) = x^3$ בקטע $[-1, 1]$ הוא:

$$\int_{-1}^1 |x - x^3| dx = \int_{-1}^0 |x - x^3| dx + \int_0^1 |x - x^3| dx = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

ב. נמצא היכן נחתכות הפרבולות $y = x^2 - x - 1$ ו- $y = 5 - x^2$:

$$x^2 - x - 1 = 5 - x^2 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \text{ או } x = -1.5$$

נקודות החיתוך הן $(-1.5, 2.75)$ ו- $(2, 1)$.

השטח הנתחם על ידי הפרבולות הוא השטח שבין הגרפים, בקטע $[-1.5, 2]$.

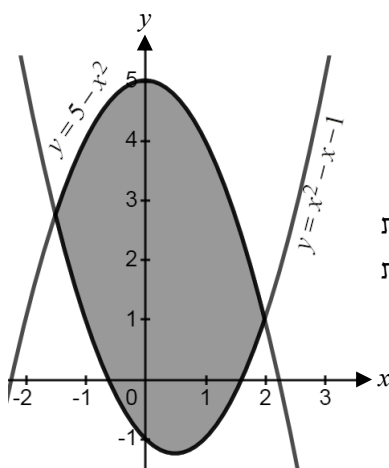
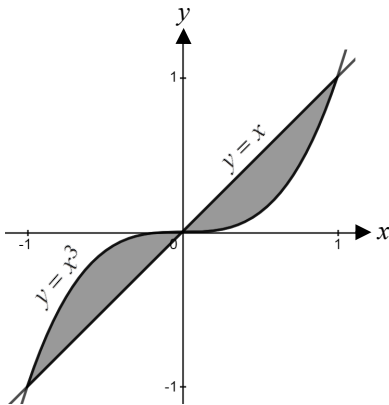
לכל x בקטע זה מתקיים $x^2 - x - 1 \leq 5 - x^2$ (קל לוודא על ידי התבוננות בפונקציית ההפרש, $x^2 - x - 1 - (5 - x^2) = 2x^2 - x - 6$, פונקציה ריבועית המתאפסת בקצות קטע זה). לכן השטח המבוקש הוא

$$\int_{-1.5}^2 ((5 - x^2) - (x^2 - x - 1)) dx = \int_{-1.5}^2 (6 + x - 2x^2) dx$$

$$= \left(6x + \frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} \right) \Big|_{-1.5}^2$$

$$= \left(12 + \frac{4}{2} - \frac{2 \cdot 8}{3} \right) - \left(-9 + \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{4} - \frac{2}{3} \left(-\frac{3}{2} \right)^3 \right)$$

$$= \frac{26}{3} + \frac{45}{8} \approx 14.29$$



סיכום הנוסחאות בכרך ג

הגדרת הפונקציות הטריגונומטריות של זווית חדה

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \quad \cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\tan \alpha = \frac{a}{b} \quad \cot \alpha = \frac{b}{a}$$

מעלות ורדיאנים $\pi = 180^\circ; 1^\circ = \frac{\pi}{180}; 1 = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57.3^\circ$

קשרים בין פונקציות טריגונומטריות

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\tan \alpha}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

זהויות של סכום והפרש זוויות

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\cot(\alpha \pm \beta) = \frac{\cot \alpha \cot \beta \mp 1}{\cot \alpha + \cot \beta}$$

ערכים מיוחדים של פונקציות טריגונומטריות

α (ברדיאנים)	α (במעלות)	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$	$\cot \alpha$
0	0°	0	1	0	לא מוגדר
$\pi/6$	30°	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}$
$\pi/4$	45°	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1	1
$\pi/3$	60°	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/3$
$\pi/2$	90°	1	0	לא מוגדר	0
π	180°	0	-1	0	לא מוגדר
$3\pi/2$	270°	-1	0	לא מוגדר	0

זווית כפולה

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$

$$\cot 2\alpha = \frac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha}$$

זוגיות ואי־זוגיות

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

$$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$$

מחזוריות

$$\sin(\alpha + 2\pi k) = \sin\alpha$$

$$\tan(\alpha + \pi k) = \tan\alpha$$

$$\cos(\alpha + 2\pi k) = \cos\alpha$$

$$\cot(\alpha + \pi k) = \cot\alpha$$

(לכל $k \in \mathbb{Z}$)

קשרים בין זוויות

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$$

$$\sin(\pi/2 - \alpha) = \cos\alpha$$

$$\tan(\pi/2 - \alpha) = \cot\alpha$$

$$\cos(\pi/2 - \alpha) = \sin\alpha$$

$$\cot(\pi/2 - \alpha) = \tan\alpha$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$$

משפט הקוסינוסים

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

משפט הסינוסים

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = 2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$

שטח משולש

סכום והפרש פונקציות טריגונומטריות

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha - \beta}{2}\cos\frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\sin\frac{\alpha - \beta}{2}$$

מכפלת פונקציות טריגונומטריות

$$\begin{aligned}\sin \alpha \sin \beta &= \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2} \\ \cos \alpha \cos \beta &= \frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{2} \\ \sin \alpha \cos \beta &= \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2}\end{aligned}$$

פתרון משוואות טריגונומטריות יסודיות

$$\begin{aligned}\sin x = a &\Leftrightarrow x = \arcsin a + 2\pi k \text{ או } x = \pi - \arcsin a + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \cos x = a &\Leftrightarrow x = \pm \arccos a + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \tan x = a &\Leftrightarrow x = \arctan a + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \cot x = a &\Leftrightarrow x = \operatorname{arccot} a + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

משוואת ישר שאינו אנכי

$$y = ax + b$$

משוואת ישר אנכי

$$x = x_0$$

שיפוע של ישר בהינתן שתי נקודות עליו

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$(x_1 \neq x_2)$$

משוואת ישר בהינתן השיפוע ונקודה עליו

$$y = a(x - x_0) + y_0$$

משוואת ישר כללית

$$Ax + By = C$$

(לפחות אחד מבין A, B אינו 0)

הקשר בין שיפוע לזווית

$$a = \tan \alpha$$

תנאי הניצבות של שני ישרים

$$m_1 m_2 = -1$$

(m_1, m_2 הם שיפועי הישרים)

זווית חדה בין שני ישרים

$$\tan \alpha = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$$

(m_1, m_2 הם שיפועי הישרים; הישרים אינם אנכיים ואינם ניצבים זה לזה).

הצגה פרמטרית של ישר

$$\begin{aligned}P_t &= ((1-t)x_1 + tx_2, (1-t)y_1 + ty_2) \\ \ell &= \{P_t \mid t \in \mathbb{R}\}\end{aligned}$$

$$P_{1/2} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right) \quad \text{אמצע של קטע}$$

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \quad \text{מרחק בין שתי נקודות}$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \quad \text{משוואת המעגל}$$

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad \text{שניונית כללית}$$

האליפסה

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b) \quad \text{משוואת אליפסה קנונית}$$

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \quad (a \neq b) \quad \text{משוואת אליפסה מקבילה לצירים}$$

מוקדי האליפסה המקבילה לצירים

$$(x_0 \pm c, y_0) \quad c = \sqrt{a^2 - b^2} \quad : a > b \quad \text{במקרה}$$

$$(x_0, y_0 \pm c) \quad c = \sqrt{b^2 - a^2} \quad : a < b \quad \text{במקרה}$$

הפרבולה

$$y^2 = 2px \quad (p > 0) \quad \text{משוואת פרבולה קנונית}$$

$$\left(\frac{p}{2}, 0 \right) \quad \text{מוקד הפרבולה הקנונית}$$

$$x = -\frac{p}{2} \quad \text{מדריך הפרבולה הקנונית}$$

$$x = ay^2 + by + c \quad (a \neq 0) \quad \text{פרבולה מקבילה לציר } x$$

$$y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0) \quad \text{פרבולה מקבילה לציר } y$$

ההיפרבולה

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{משוואת ההיפרבולה קנונית}$$

$$(\pm c, 0) \quad c = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{מוקדי ההיפרבולה הקנונית}$$

כללי הגזירה

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x) \quad \text{נגזרת הסכום:}$$

$$(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x) \quad \text{נגזרת ההפרש:}$$

$$(c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x) \quad \text{נגזרת של מכפלת פונקציה בקבוע:}$$

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \quad \text{נגזרת המכפלה:}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)} \quad \text{נגזרת המנה:}$$

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \quad \text{כלל השרשרת:}$$

$$(ax + b)' = a \quad \text{נגזרת של פונקציה לינארית:}$$

$$(x^r)' = rx^{r-1} \quad \text{נגזרת של פונקציית חזקה:}$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{נגזרת של פונקציית השורש:}$$

נגזרות הפונקציות הטריגונומטריות היסודיות:

$$\sin'(x) = \cos x \quad \cos'(x) = -\sin x$$

$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \cot'(x) = \frac{-1}{\sin^2 x}$$

$$(e^x)' = e^x \quad \text{נגזרות הפונקציות המעריכיות:}$$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

$$\ln'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{נגזרות הפונקציות הלוגריתמיות:}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(|x|)' = \frac{|x|}{x} \quad \text{נגזרת של פונקציית הערך המוחלט:}$$

האינטגרל המסוים

הנוסחה היסודית של החשבון האינפיניטסימלי:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b$$

(F היא פונקציה קדומה של f בקטע $[a, b]$: $F'(x) = f(x)$)

האינטגרל הלא מסוים - כללי אינטגרציה

$$\int (cf(x)) dx = c \int f(x) dx \quad \text{אינטגרל של מכפלת פונקציה בקבוע:}$$

אינטגרל של סכום או הפרש פונקציות:

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$\int (f(x) - g(x)) dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$$

$$\int f(g(x))g'(x) dx = F(g(x)) + C \quad \text{כלל ההצבה:}$$

$$\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C \quad \text{כלל ההצבה הלינארית (} a \neq 0 \text{):}$$

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx \quad \text{אינטגרציה בחלקים:}$$

אינטגרלים של פולינומים ופונקציות חזקה:

$$\int 0 dx = C$$

$$\int 1 dx = x + C$$

$$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \quad (r \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

אינטגרלים של פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות:

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1)$$

$$\int \ln x dx = x \ln x - x + C$$

אינטגרלים של פונקציות טריגונומטריות:

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C$$

$$\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$$



סדרת הספרים **מתמטיקה קדם אקדמית**, המלווה את הקורס בשם זה, היא שער כניסה ללימודים אקדמיים בתחומי המתמטיקה והמדעים. היא כוללת את מרבית נושאי המתמטיקה התיכוניים, בגישה שיטתית המעודדת חשיבה עצמאית והבנה תיאורטית.

הספרים מתאימים ללימוד עצמי, ומכילים מאות תרגילים ופתרונותיהם. הם מיועדים בראש ובראשונה לסטודנטים המתכוננים ללימודים אקדמיים בתחומי המדעים, אך מתאימים גם לתלמידי תיכון המעוניינים להעמיק את הבנתם ולכלל המבקשים להשלים את השכלתם המתמטית הבסיסית.

הכרך הראשון עוסק באריתמטיקה בסיסית, זהויות ומשוואות אלגבריות ואי־שוויונות, **הכרך השני** בסדרות ואינדוקציה, פונקציות, חזקות ולוגריתמים ומושגים בגיאומטריה, **והכרך השלישי** בטריגונומטריה, גיאומטריה אנליטית וחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי.

ד"ר גיל אלון הוא מתמטיקאי וחבר סגל בכיר במחלקה למתמטיקה ולמדעי המחשב באוניברסיטה הפתוחה.

קורס 95003
מק"ט 95003-2037
מסת"ב 2-1717-06-965-978 ISBN
lamda-openubooks.co.il



 למדא - ספרי האוניברסיטה הפתוחה

